Mesures de GIBBS et mesures harmoniques pour les feuilletages aux feuilles courbées négativement

Sébastien Alvarez

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
Institut De Mathématiques De Bourgogne, UMR 5584 Du CNRS
UFR De Sciences et Techniques

THÈSE

en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Sébastien ALVAREZ

Intitulée :

MESURES DE GIBBS ET MESURES HARMONIQUES POUR LES FEUILLETAGES AUX FEUILLES COURBÉES NÉGATIVEMENT

dirigée par

M. Christian BONATTI

soutenue publiquement le 18 décembre 2013 après avis de :

M. Vadim KAIMANOVICH
M. François LEDRAPPIER

devant la commission d'examen formée de :

M. Christian BONATTI
M. Jérôme BUZZI
M. Patrick GABRIEL
M. Étienne GHYS
M. Rémi LANGEVIN
M. François LEDRAPPIER
Mme Ana RECHTMAN
Mme Barbara SCHAPIRA

Résumé

Dans ce travail de thèse, nous développons une notion de mesure de Gibbs pour le flot géodésique tangent aux feuilles d'un fibré feuilleté au dessus d'une base négativement courbée. Nous développons également une notion de mesure F-harmonique et prouvons qu'il existe une correspondance bijective entre les deux.

Lorsque la fibre est un espace projectif $\mathbb{CP}^1$, que l'holonomie est projective, et qu'il n'y a pas de mesure transverse invariante, nous prouvons l'unicité de ces mesures, et ce pour tout potentiel Hölder sur la base. Dans ce cas, nous prouvons également que la mesure F-harmonique se réalise comme limite pondérée de grandes boules tangentes aux feuilles, et que leurs mesures conditionnelles dans les fibres sont des limites de moyennes pondérées sur les orbites du groupe d'holonomie.

Remerciements

C’est un plaisir d’exprimer toute ma gratitude, mon admiration, ainsi que mon amitié à Christian Bonatti, qui a dirigé ma thèse. Ce travail n’aurait pas vu jour sans le soutien, l’énergie, l’enthousiasme, l’exigence, la confiance qu’il a su exprimer. Je m’estime extrêmement chanceux d’avoir pu bénéficier de ses explications lumineuses, de sa grande exigence esthétique, et de son intuition prodigieuse, lors d’innombrables conversations mathématiques où j’ai tant appris. Aussi loin que je me souvienne, elles ont toutes été ponctuées, par la même réaction de ma part (et il faut ici m’imaginer un sourire à l’envers aux lèvres) : “Hum... classe.”

François Ledrappier et Vadim Kaimanovich ont accepté la lourde tâche de rapporter ce gros mémoire. Je tiens à les remercier de l’honneur qu’ils me font en ayant accepté ce rôle. Leur appréciation m’est d’autant plus précieuse que leurs travaux ont directement inspiré les différents résultats de cette thèse, qui a de plus largement bénéficié de nombreuses conversations et échanges de mails.

Je tiens également à remercier les membres de mon jury pour l’honneur qu’ils me font en étant présents pour ma soutenance : merci à Jérôme Buzzi, Patrick Gabriel, Étienne Ghys, Rémi Langevin, Ana Rechtman et Barbara Schapira.

Mon parcours mathématique a été jalonné de rencontres qui se sont avérées décisives. Je tiens à remercier Jana Rodriguez Hertz, et Marcelo Viana pour m’avoir accueilli à Montevideo et Rio lors de stages au cours desquels j’ai tant appris en recherche. Ghani Zeghib m’a beaucoup suivi lorsque j’étais à Lyon, et Étienne Ghys m’a suggéré d’aller voir du côté de Dijon. De plus, leur cours de théorie ergodique à Lyon a eu une grande influence sur mes travaux : je les en remercie grandement. Merci à Xavier Gómez-Mont, Matilde Martínez et Amie Wilkinson pour un séjour à Chicago extrêmement enrichissant. J’ai pu bénéficier de conversations avec Bertrand Deroin et François Ledrappier sur plusieurs aspects de ce travail : je tiens à les en remercier chaleureusement. Merci enfin à mes collaborateurs Nicolas Hussenot et Pablo Lessa, parce que c’est quand même vraiment mieux de travailler à plusieurs. J’espère qu’on continuera à faire de belles maths ensemble.

Merci aux membres du projet ANR DynNonHyp pour avoir organisé de nombreuses rencontres, toujours très intéressantes. Merci également aux membres du projet ANR Geode pour avoir permis que je m’invite à plusieurs événements, et pour m’avoir donné la parole à plusieurs occasions.

J’ai pu bénéficier à Dijon de la bonne ambiance qui règne au sein de l’IMB. J’adresse un merci collectif aux membres de l’unité pour les discussions mathématiques, politiques, les rires et les coups de gueule en salle café. À titre plus personnel, je remercie le directeur Luis Paris pour son travail remarquable, ainsi que pour réussir l’exploit d’avoir un rire plus tonitruant que le mien. Merci à Olivier Couture et Ahmed Jebrane qui m’ont proposé une mission d’enseignement très intéressante, et qui m’ont considérablement aidé. Enfin, encore merci à Patrick Gabriel qui a toujours été investi d’une mission noble : celle de nourrir les doctorants lors de nos sessions de travail nocturnes.

L’organisation du groupe de travail de dynamique a considérablement rythmé l’an passé. Merci à tous les invités, ainsi qu’aux participants réguliers : Bin, Christian, Doris, Églantine, Gioia, Johan, Katsutoshi et Yi. Je tiens à remercier tous les doctorants de l’IMB pour les pots, les barbeucs, les galettes, et puisqu’il nous arrive quand-même de travailler de temps en temps, merci d’avoir contribué à faire vivre le séminaire étudiant, que je considère comme une vraie réussite. Un petit big up aux anciens membres de l'assoc', Vincent et Lionel, ainsi qu'à la relève : Olivier, Charlie et Ben. J'adresserai une mention spéciale aux cobureaux successifs : Vincent, Martin, Yi, Églantine, Ben, et Bruno.

Je n'oublie pas bien sûr celles qui tiennent le laboratoire à bout de bras, et qui le font vivre. Merci à Anissa, Caroline, Ibtissam et Magali. Vous êtes au top ! Merci aussi à Francis et à Pierre, le premier a su pallier mon incompétence informatique, et le second a su me dénicher les articles introuvables dont j'avais désespérément besoin.

Merci aux copains ! De Paris, Dijon, et de Lyon. Merci aux koos : Aloïs, Camille, Dimy, Geekou, JR, Sophie. Je le leur slammerais bien, mais je ne tiens pas forcément à ce que les remerciements prennent plus de place que la thèse. Ils sont là depuis longtemps maintenant, et entre autres choses, ils ont réussi à ériger la torche en principe : *le travail n'est jamais fini*. Merci à mon bro'loc Michou pour son soutien, bien qu'il soit parti s'exiler en Californie. Merci aux vieux Ju, Sam, Val, Glorieux, et au petit Seb pour les délires, les soirées, et toutes les conversations passionnantes de maths qu'on a pu avoir. Sans Martin et Simone, mon passage à Dijon aurait été bien triste. Merci les gars ! Je suis très heureux d'avoir pu pourrir votre Français, et très fier que vous puissiez citer Assassin dans le texte. Merci aussi à Ariadna et Maja : l'an dernier était fun. Merci aux gros Flo et Pascal, pour être toujours là.

Merci au soutien indeffectible des amis proches. Merci à Joëlle qui, oui on a déjà entendu vingt fois l'histoire, me connaît depuis que je suis tout poulet. Merci à Léo, dont l'intelligence pratique sans faille me permit autrefois de me débloquer à Medievil. Merci à Jean, qui m'a assisté lors de mon premier travail mathématique sur les bifurcations de Hopf.

Merci à ma famille. À ma tante Tamara qui me soutient depuis toujours et qui partage ma passion de la musique. À ma cousine Marion, qui est comme ma sœur, bien qu'elle ait toujours triché à Tekken. Merci pour ses accueils à Londres, pour les sessions de procrastination qu'elle m'impose, pour notre complicité : est-ce que ça le fait ? Merci à mon petit frère Maxime qui, sans vraiment se soucier de préserver sa double identité, insiste pour se faire remercier en tant que Batman. Merci pour les rires, la complicité, pour me laisser squatter tes consoles, malgré tout ce que je t'ai fait subir. Merci à ma mère qui m'a tout appris : c'est d'ailleurs elle qui faisait mes équations en 4ème, et qui vous dira que quoi qu'il arrive j'ai toujours été incapable de faire une division. Merci à mon père qui, espéronsle, excèle en tant que coupeur de pata negra. Merci pour tout mes parents.

Merci à Cécile pour tout ce qu'on a vécu ensemble. Ces moments passés ensemble ont sans doute compté parmi les plus beaux de ma vie.

Marco Brunella s'était très tôt intéressé à mes travaux, et, avec toute sa gentillesse et sa générosité, m'avait raconté la façon "dérouler" les fonctions harmoniques. Barthélémy, grand ami de mes parents, aurait sans doute été fier du travail de son *bonhomme*. Cette thèse est dédiée à leurs mémoires.

Table des matières

Introduction

1 | Présentation du problème

Depuis le développement de la dynamique hyperbolique, la théorie des feuilletages s'est avérée être un outil puissant permettant aux dynamiciens d'étudier les propriétés qualitatives de certains systèmes. Nous adoptons dans cette thèse un point de vue différent : nous ne considèrerons pas les feuilletages *venant* des systèmes dynamiques, mais *en tant* que systèmes dynamiques. Plus précisément, c'est au niveau ergodique que nous placerons notre discussion.

La théorie ergodique est classiquement définie comme l'étude statistique des trajectoires d'un système dynamique sur le long terme. De façon plus prosaïque, elle est souvent vue comme l'étude des mesures de probabilité laissées invariantes par un difféomorphisme, ou un flot, d'une variété compacte. Une telle définition de l'objet d'étude est cohérente, car ces systèmes laissent *toujours* invariante une mesure de probabilité.

Ceci n'a plus aucune raison d'être le cas pour un feuilletage. Avant d'expliquer pourquoi, rappelons qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ d'une variété compacte M est une partition en sous-variétés connexes immergées de même dimension (les feuilles), qui localement ressemble à une partition triviale : celle d'un espace euclidien $\mathbb{R}^{p+d}$ par les sous-espaces $\mathbb{R}^p \times \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Lorsque $p = 1$, le feuilletage est donné par les courbes intégrales d'une équation différentielle sur M. Passer en dimension supérieure présente clairement de nombreuses difficultés. Tandis que la topologie des feuilles de dimension 1 est bien comprise (les courbes sont des cercles ou des droites), celle des feuilles de dimension plus grande peut être très compliquée : même dans le cas de la dimension 2, l'ensemble des bouts d'une feuille peut être homéomorphe à un ensemble de Cantor. En d'autre termes, il n'y a en dimension 1 que deux façons d'aller à l'infini sur une courbe intégrale : aller dans le futur et aller dans le passé. Alors que sur une feuille de dimension supérieure il peut y avoir une infinité non dénombrable de façons d'aller à l'infini.

Lorsque deux sous-variétés locales plongées de dimension k, T_1 et T_2, sont transverses au feuilletage, et rencontrent une même feuille L, nous pouvons, en glissant le long des feuilles “suffisamment voisines” de L tout en suivant un chemin tracé sur L qui relie deux points d'intersection $x_i \in L \cap T_i$, $i = 1,2$, définir une *transformation d'holonomie* (ou transformation de Poincaré) le long de c, définie sur un petit voisinage de x_1. En choisissant n petites transversales locales à $\mathscr{F}$, $T_1, T_2, ..., T_n$, dont l'union $\mathscr{T}$ rencontre toute feuille, nous pouvons naturellement munir $\mathscr{T}$ d'un système dynamique appelé *pseudogroupe d'holonomie*, qui est constitué des différentes applications d'holonomie. C'est un pseudogroupe : il est consititué de difféomorphismes locaux et est stable par composition (là où elle est définie) et par inversion. Lorsque le feuilletage est *transverse à une fibration*, l'holonomie est en fait donnée par un vrai groupe de difféomorphismes de la fibre.

L'existence systématique d'une mesure invariante par l'action d'un groupe sur un espace compact impose de très fortes restrictions sur ce groupe : c'est la *moyennabilité*. De même, en général, l'action d'un pseudogroupe sur un espace compact ne préservera aucune mesure de probabilité. Nous sommes donc immédiatement confrontés à une difficulté. Comment généraliser alors dans notre cadre l'étude des mesures invariantes par le flot d'un champ de vecteurs ?

En 1983, Garnett a proposé une approche très intéressante à ce problème : voir [Gar]. Son idée consiste à partir à l'infini dans les feuilles en suivant des chemins Browniens. L'étude statistique du feuilletage se ramène alors à celle des chemins typiques que l'on peut tracer dans ses feuilles. Plus précisément, lorsque les feuilles d'un feuilletage sont munies d'une métrique Riemannienne, il est possible de définir un Laplacien, ainsi qu'un opérateur de diffusion de la chaleur, dans les feuilles. Une *mesure harmonique* est alors une mesure qui est invariante par diffusion de la chaleur feuilletée, ou, c'est équivalent, qui s'annule sur tous les Laplaciens de fonctions continues et C^2 dans les feuilles. L'intérêt de telles mesures est, d'une part, que lorsque les feuilles sont de dimension 1, elles coïncident exactement avec les mesures invariantes. D'autre part, elles généralisent de la notion de mesure transverse invariante par holonomie : lorsque l'on a une telle mesure, il est toujours possible de la combiner avec le volume dans les feuilles, de façon à obtenir une mesure harmonique que l'on appelle *totalement invariante*. Enfin et surtout, de telles mesures existent toujours.

À première vue, la définition de mesure harmonique est profondément analytique, et n'a pas de liens évidents avec la dynamique topologique. En dépit de cela, cette théorie a connu plusieurs succès. Deux exemples frappants sont :

– la classification topologique donnée par Ghys (voir [Gh]) des feuilles typiques pour les mesures harmoniques d'un feuilletage par surfaces de Riemann, dont Cantwell et Conlon ont donné un analogue topologique pour les feuilletages minimaux ;
– la dichotomie de Deroin-Kleptsyn (voir [DK]) pour les feuilletages transversalement conformes : ou bien il existe une mesure transverse invariante par holonomie, ou bien le feuilletage $\mathscr{F}$ a un nombre fini d'ensembles minimaux, chacun d'entre eux portant une unique mesure harmonique ergodique, dont l'exposant de Lyapunov transverse pour le mouvement Brownien est négatif, et dont l'union des bassins d'attraction est totale.

Néanmoins, une question typique est toujours ouverte. Dans [GLW], Ghys, Langevin et Walczak ont défini une notion d'entropie topologique transverse pour les feuilletages. Nous ne rentrerons pas dans le détail. Tout juste dirons-nous que c'est une bonne notion d'entropie. En effet, d'une part elle généralise la notion classique d'entropie topologique des flots. D'autre part il y a une interprétation claire de l'annulation de cette entropie. Si elle s'annule, c'est qu'il y a une mesure transverse invariante par holonomie, sinon, et si le feuilletage est de codimension 1, c'est qu'il existe une feuille ressort (c'est l'analogue du "jeu de ping-pong" des actions de groupes). Il n'y a cependant toujours pas à ce jour de notion d'entropie de mesure qui permettrait d'approcher l'entropie transverse. Mentionnons également la très intéressante notion d'*entropie transverse du flot géodésique feuilleté* développée par Langevin et Walczak [LW].

Un feuilletage a de l'entropie si nous savons que suffisamment de feuilles se séparent, ne serait-ce que dans *une* direction. Or, comme le laisse entendre le théorème de Deroin-Kleptsyn, en l'absence de mesure transverse invariante, l'holonomie le long d'un chemin Brownien a tendance à être contractante : il semblerait que les mesures harmoniques ne détectent pas les directions où les feuilles se séparent.

C'est le problème d'approcher l'entropie topologique par une certaine entropie mesurée qui avait motivé cette thèse, et qui reste assez largement ouvert. À cause de la difficulté rencontrée, nous avons été conduits à nous intéresser à d'autres mesures naturelles pour les feuilletages que les seules mesures harmoniques.

Nous nous intéressons dans la suite au cas où *toutes les feuilles sont courbées négativement*. Nous pouvons imaginer d'autres manières d'aller à l'infini dans les feuilles. Nous pourrions par exemple demander à suivre les géodésiques : existe-t-il des mesures qui décrivent le comportement de la plupart (c'est-à-dire d'un ensemble de mesure de Lebesgue positive) des géodésiques dans les feuilles ? C'est un analogue des mesures SRB que nous demanderions alors. La question est particulièrement pertinente lorsque les feuilles sont courbées négativement, le *flot géodésique feuilleté* possédant alors une certaine forme d'hyperbolicité dans les feuilles.

Nous pourrions également imaginer un analogue multidimensionnel des moyennes de Birkhoff. Une feuille L peut être revêtue par une variété $\widetilde{L}$ complète simplement connexe à courbure pincée entre deux constantes négatives $-b^2 \leq -a^2$. Nous pouvons procéder ainsi. Considérons le volume normalisé restreint à une grande boule de rayon $R \gg 1$ dans $\widetilde{L}$, et projetons cette mesure quelque part sur L. Nous obtenons ainsi une famille de mesures qui décrit le comportement asymptotique des grandes boules tangentes aux feuilles. Que dire des points d'accumulation d'une telle famille de mesures ?

Il y a dix ans, Bonatti et Gómez-Mont, en collaboration avec Viana et Vila, dans une série de trois papiers [BG, BGV, BGVil], se sont intéressés à ces mesures, limites de grands disques, dans le cadre des feuilletages transverses à une fibration projective en $\mathbb{CP}^1$ au dessus d'une surface hyperbolique. Ils étaient parvenus à prouver la dichotomie suivante : soit il existe une mesure transverse invariante par holonomie, soit il existe une unique mesure qui est limite de grands disques dans les feuilles. Il s'avère que dans ce cas, la mesure ainsi construite décrit également le comportement de presque toute géodésique, et de presque tout chemin Brownien tangents aux feuilles. Ce fait était assez miraculeux, et un lien entre mesures harmoniques et flot géodésique feuilleté est alors apparu. Dans une prépublication récente [BGM], ce lien a amené Bonatti, Gómez-Mont et Martínez à introduire une nouvelle notion faible d'hyperbolicité : l'*hyperbolicité feuilletée*. Énonçons à présent une conséquence des résultats de cette thèse :

Théorème 1. *Supposons que $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ soit un fibré feuilleté projectif au dessus d'une surface Riemannienne compacte courbée négativement Σ, et dont les feuilles sont localement isométriques à la base. Supposons de plus que le groupe d'holonomie $\rho(\pi_1(\Sigma))$ ne laisse invariante aucune mesure de probabilité sur $\mathbb{CP}^1$. Alors les assertions suivantes sont vraies :*
- *il existe une unique mesure harmonique pour $\mathscr{F}$;*
- *il existe une unique mesure SRB pour le flot géodésique feuilleté de $\mathscr{F}$;*
- *il existe un unique point d'accumulation des mesures d'aire normalisées de grands disques tangents aux feuilles de $\mathscr{F}$.*

De plus, lorsque la courbure de Σ est variable, et lorsque la représentation est fuchsienne ou quasi-fuchsienne, la mesure harmonique, la projection sur M de la mesure SRB, et la limite des grands disques, sont mutuellement singulières.

Plus intéressante peut-être que ce théorème lui-même est la preuve unifiée que nous en donnons. Chacune des trois mesures obtenues au théorème 1 correspond à un certain potentiel Hölder dans la base, et nous pouvons relier deux problèmes qui semblent pourtant assez différents :
- la théorie ergodique du flot géodésique feuilleté, en particulier une notion de mesure de Gibbs dans ce contexte ;
- donner des exemples de cocycles qui se réalisent comme cocycles de Radon-Nikodym de mesures transverses quasi-invariantes par le pseudogroupe d'holonomie.

Nous ne développons la notion de mesure de Gibbs pour des potentiels généraux que dans le cas des suspensions : pour la développer dans le cas plus général des feuilletages à feuilles de courbure négative, il faudrait pouvoir transposer les travaux de Ledrappier [L3] du contexte des revêtements de variétés compaces à celui des revêtements de variétés se réalisant comme feuille d'un feuilletage d'une variété compacte. Nous développons cette notion de mesure de Gibbs dans l'espoir d'être à même d'établir des liens nouveaux entre dynamique topologique des feuilletages et théorie ergodique.

Avant d'expliquer les résultats, nous voulons faire une remarque sur la dernière partie du théorème. Nous n'avons traité que le cas facile des représentations fuchsiennes et quasi-fuchsiennes, c'est-à-dire le cas où la représentation d'holonomie est fidèle discrète et préserve une courbe de Jordan dans $\mathbb{CP}^1$ ainsi que les deux composantes connexes du complémentaire. Dans ce cas le fait que les trois mesures dont il est question dans le théorème 1 soient singulières est une application assez directe des travaux de Ledrappier et Katok (voir [L2, Ka1, Ka2]) entraînant que sur le cercle à l'infini d'une surface Riemannienne compacte à courbure négative variable, les classes harmonique, de visibilité, et de Patterson-Sullivan, sont deux-à-deux mutuellement singulières.

En revanche, *nous ne prétendons pas* prouver un résultat de rigidité, et nous affirmons que pour des représentations plus générales, un tel résultat n'est pas conséquence immédiate des travaux de Ledrappier et Katok. Par exemple, que se passe-t-il lorsque la représentation transite à travers un groupe libre ? Nous pouvons par exemple, lorsque Σ est de genre 2, engendrer $\pi_1(\Sigma)$ par quatre éléments a, b, c, d, assujettis à la relation $[a, b][c, d] = Id$, et envoyer ce groupe sur un groupe libre à deux générateurs en envoyant b et d sur l'identité. Il est alors possible de réaliser le groupe libre $\langle a, c\rangle$ comme un groupe de Schottky, ou ce qui semble plus compliqué, comme un groupe libre engendré par une dynamique Morse-Smale et une rotation irrationnelle du cercle. Nous pouvons alors poser une question qui semble encore tout-à-fait ouverte :

Question. A-t-on en général un phénomène de rigidité, c'est-à-dire, sous les hypothèses du théorème 1, et lorsque la courbure de la base est variable, les trois mesures que l'on obtient sont-elles toujours mutuellement singulières ?

Dans le cas particulier de la représentation de Schottky décrite plus haut, nous espérons que la réponse soit positive, car les orbites peuvent alors être codées de manière très naturelle. Dans le cas non discret, où l'on regarde l'action jointe d'une dynamique elliptique et d'une dynamique hyperbolique, le problème semble nettement plus dur à appréhender.

2 | Limite de grands disques

Cas de la courbure constante. En courbure constante, le théorème 1 est dû à Bonatti et Gómez-Mont, [BG]. Il s'avère de plus que les mesures décrites dans ce théorème coïncident. L'argument est le suivant. Les feuilles sont à courbure -1 : l'aire des grands disques croît de manière exponentielle. En particulier la totalité de la masse se concentre au bord, et nous pouvons voir qu'une mesure limite de grands disques est en fait limite de grands cercles. Mais la translation le long des grands cercles converge vers le flot horocyclique. Nous pouvons ainsi voir qu'une limite de grands disques tangents aux feuilles peut être vue comme projection d'une mesure invariante par le flot horocyclique instable feuilleté. Nous avons donc à prouver l'unique ergodicité du flot horocyclique feuilleté.

Le reste de la preuve utilise le travail de Bonatti, Gómez-Mont et Viana sur les exposants de Lyapunov. Il s'agit de voir le flot géodésique feuilleté G_t comme un cocycle projectif au dessus du flot géodésique g_t sur T^1B. C'est-à-dire que le flot géodésique feuilleté envoie fibre sur fibre comme une homographie $A_t(w) = (G_t)_{|V_w} : V_w \to V_{g_t(w)}$, $w \in T^1B$, $V_w = (D\Pi)^{-1}(w)$. Nous pouvons alors considérer les *exposants de Lyapunov* de ce cocycle, définis sur un Borélien de probabilité totale, par les formules suivantes :

$$\chi^+(v) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(||A_t(v)||) \text{ et } \chi^-(v) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(||A_t(v)^{-1}||^{-1}).$$

Le théorème clé prouvé par Bonatti, Gómez-Mont et Viana est la dichotomie suivante :
– soit il existe une mesure sur $\mathbb{CP}^1$ invariante par l'action du groupe d'holonomie ;
– soit l'exposant de Lyapunov maximal χ^+ est positif sur un Borélien $\mathscr{X}$ de mesure pleine pour tout état de Gibbs du flot géodésique.

Ainsi, nous avons deux sections de Lyapunov $\sigma^\pm : \mathscr{X} \to T^1\mathscr{F}$ qui commutent avec les flots géodésiques, σ^+ commute avec les flots horocycliques instables, et σ^-, avec les flots horocycliques stables. Nous avons alors deux mesures $\mu^\pm$, invariantes par G_t, obtenues en relevant la mesure de Liouville par les sections $\sigma^\pm$. La première, μ^+ est invariante par le flot horocyclique instable feuilleté, et la seconde, μ^-, par le flot horocyclique stable feuilleté. Il est de plus possible de montrer que ce sont les seules mesures invariantes et ergodiques pour G_t qui se projettent sur le mesure de Liouville.

Il reste à prouver que μ^+ est l'unique mesure invariante par le flot horocyclique instable feuilleté. Prenons-en une autre, singulière. Elle se projette sur la mesure de Liouville car le flot horocyclique est uniquement ergodique en bas. En tirant en arrière cette mesure par G_t, nous trouvons à la limite une mesure qui se projette sur la mesure de Liouville, qui est invariante par G_t et par le flot horocyclique instable feuilleté (car ce dernier commute avec G_t), et qui est singulière par rapport à μ^+. C'est donc μ^-, et on trouve que μ^- est invariante par G_t ainsi que par les deux flots horocycliques feuilletés. Or les flots horocycliques et géodésique engendrent tout $PSL_2(\mathbb{R})$: seule la mesure de Liouville est invariante par l'action jointe de ces trois flots. La mesure μ^- doit donc être obtenue en combinant la mesure de Liouville dans les feuilles et une mesure transverse invariante, ce qui contredit l'hypothèse.

Courbure variable. Lorsque la base est à courbure variable, les trois mesures que l'on considère n'ont aucune raison de coïncider. Pour obtenir, en l'absence de mesure invariante par holonomie, l'unicité de limites de grands disques, nous pouvons raisonner de la même façon, et on se retrouve amenés à prouver l'unique ergodicité du flot horocyclique instable. Malheureusement, contrairement au cas de la courbure constante, la mesure de Liouville n'est plus invariante par le flot horocyclique. Pire, il n'y a pas de mesure invariante à la fois par les flots géodésique et horocyclique. Cependant, nous pouvons reparamétrer le flot horocyclique par la mesure de Margulis et prouver l'unique ergodicité du *flot de Margulis feuilleté*. Pour prouver ceci, il s'agit de raisonner comme précédemment, et de remonter la *mesure d'entropie maximale*, qui, elle, est invariante à la fois par le flot géodésique et par le flot de Margulis, et qui de plus est un état de Gibbs. L'important à noter est qu'à *reparamétrage près* dans les feuilles instables, si l'on remonte au fibré unitaire tangent la mesure limite de grands disques, nous obtenons une *mesure de Gibbs*, c'est-à-dire une mesure invariante par le flot géodésique dont les mesures conditionnelles dans les horocycles instables sont données par les mesures de Margulis. C'est ce raisonnement qui est à l'origine de notre manière de traiter les mesures de Gibbs pour le flot géodésique feulleté.

3 | Mesures harmoniques et mesures de Gibbs

Il y a, dans cette thèse, différents niveaux de généralité. Dans ce qui suit seulement, le contexte est le plus général : nous demandons à ce que la variété close M soit feuilletée par $\mathscr{F}$, qui est muni d'une métrique Riemannienne feuilletée, variant continûment avec le paramètre transverse, de sorte que toutes les feuilles soient courbées négativement. Le pincement de la courbure des feuilles, ainsi que le minorant du rayon d'injectivité sont alors uniformes.

Mesures harmonques et flot géodésique feuilleté. Dans une série de deux papiers [Ma, BMar], dont l'un en collaboration avec Bakhtin, Martínez est parvenue à prouver que, pour tout feuilletage $\mathscr{F}$ par surfaces de Riemann hyperboliques, il existe une correspondance bijective entre les mesures harmoniques pour $\mathscr{F}$, et les mesures sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathscr{F}$ qui sont invariantes par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable feuilletés. Nous présenterons une preuve plus courte de ce théorème dans la suite. Quand la courbure des feuilles n'est pas constante, il n'y a plus de lien clair entre le flot horocyclique et les mesures harmoniques.

En revanche, il y a toujours un lien entre mesures harmoniques et flot géodésique feuilleté. Les mesures harmoniques se caractérisent par le fait qu'elles ont une désintégration équivalente à Lebesgue dans les feuilles de $\mathscr{F}$, et que les densités locales sont des fonctions harmoniques positives. Or, en courbure négative, une fonction harmonique positive s'écrit de manière unique en intégrant le noyau de Poisson contre une mesure de Borel finie sur la sphère à l'infini :

$$h(z) = \int_{\widetilde{L}(\infty)} k(o,z;\xi)\,d\eta(\xi),$$

où o, z appartiennent à $\widetilde{L}$, le revêtement universel Riemannien de la feuille L, ξ appartient à la sphère à l'infini $\widetilde{L}(\infty)$, et $k : \widetilde{L}\times\widetilde{L}\times\widetilde{L}(\infty)\to(0,\infty)$ est le noyau de Poisson (voir le chapitre IV). Il est alors possible de "dérouler" la fonction harmonique en considérant la mesure sur $T^1\widetilde{L} = \widetilde{L}\times\widetilde{L}(\infty)$ obtenue en intégrant contre η les mesures $k(o,z;\xi)\mathrm{Leb}_{\widetilde{L}\times\{\xi\}}$.

En effectuant ce raisonnement feuille à feuille, nous voyons qu'il est possible de remonter canoniquement à $T^1\mathscr{F}$ les mesures harmoniques (il faut néanmoins faire attention à ce que la définition de la mesure soit cohérente avec l'holonomie du feuilletage). La mesure ainsi obtenue n'est pas invariante par le flot géodésique : nous devons, comme précédemment, la reparamétrer dans les feuilles instables. Comment faire ?

En courbure négative, les chemins Browniens sont escortés par des géodésiques : une idée de Ledrappier [L1] consiste alors à définir une mesure invariante par le flot géodésique qui ne décrit le comportement que de ces escortes géodésiques. Il a été prouvé par Sullivan [Su2] que la distribution de sortie à l'infini du mouvement Brownien (la *classe harmonique*) ne dépend pas du point de départ des chemins Browniens, charge tous les ouverts, et n'a pas d'atome. Il est donc possible, via le flot géodésique, de rabattre cette classe sur les horosphères. Nous obtenons ainsi la classe harmonique sur les horosphères qui est invariante par le flot géodésique. Une *mesure de H-Gibbs* est alors une mesure invariante par le flot géodésique feuilleté dont la désintégration dans les variétés instables est dans la classe harmonique. Lorsque les feuilles sont des surfaces hyperboliques, ces mesures de Gibbs sont exactement données par les mesures invariantes à la fois par les flots géodésique et horocyclique instable feuilletés. Elles sont associées au potentiel suivant :

$$H(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log k_{L(v)}(c_v(0), c_v(t); c_v(-\infty)),$$

où $v \in T^1\mathscr{F}$, $k_{L(v)}$ est le noyau de Poisson associé à la feuille de v, et c_v est la géodésique dirigée par v.

Nous prouvons alors au chapitre IV le théorème suivant (c'est le théorème 4.2.1 dans le texte), qui généralise le théorème de Martínez, Bakhtin-Martínez (à noter que dans [CM], Connell et Martínez donnent également une généralisation dans le cas où les feuilles sont des espaces symétriques de rang supérieur).

Théorème 2. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée telle que toutes les feuilles soient courbées négativement. Alors il existe une correspondance bijective entre les mesures de H-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté et les mesures harmoniques.*

États de u-Gibbs et mesures ϕ^u-harmoniques. Un *état de u-Gibbs* pour le flot géodésique feuilleté est une mesure sur $T^1\mathscr{F}$ invariante dont la désintégration dans les feuilles instables est équivalente à Lebesgue : elles sont associées à un potentiel qu'il est d'usage de noter ϕ^u et qui vaut, lorsque $v \in T^1\mathscr{F}$:

$$\phi^u(v) = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log \operatorname{Jac}^u G_t(v),$$

où $\operatorname{Jac}^u G_t$ représente la restriction de $|\det DG_t|$ à l'espace instable.

Ces mesures existent toujours, et leurs projections sur M ont des désintégrations équivalentes à Lebesgue dans les feuilles de $\mathscr{F}$ (ceci est déjà prouvé dans [BGM]). Nous serons amenés à nous intéresser aux densités locales. Elles présentent une forte analogie avec les fonctions harmoniques classiques : une telle densité s'écrit comme intégrale contre une mesure de Borel à l'infini du noyau suivant (en notant $\widetilde{\phi}^u$ le relevé du potentiel au revêtement $T^1\widetilde{L}$) :

$$k^u(o,z;\xi) = \exp\left[\int_\xi^z \widetilde{\phi}^u - \int_\xi^o \widetilde{\phi}^u\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{\operatorname{Jac}^u G_{-T-\beta_\xi(o,z)}(v_{\xi,z})}{\operatorname{Jac}^u G_{-T}(v_{\xi,o})},$$

où la différence des intégrales a un sens qu'on précisera par la suite, où $v_{\xi,z}, v_{\xi,o}$ sont les vecteurs basés en z et o pointant vers ξ dans le passé, et où β_ξ représente la fonction de Busemann, qui sera définie au début du chapitre I. Une telle fonction est appelée *ϕ^u-harmonique*.

Nous introduisons donc une notion de mesure ϕ^u-harmonique, c'est-à-dire de mesure dont les densités dans les plaques sont ϕ^u-harmoniques, et en "déroulant" les densités, comme nous déroulions les fonctions harmoniques, nous proposons de prouver le théorème suivant :

Théorème 3. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée telle que toutes les feuilles soient courbées négativement. Alors il existe une correspondance bijective entre les états de u-Gibbs pour le flot gédésique feuilleté et les mesures ϕ^u-harmoniques.*

Nous tirons de ce théorème les prémisses d'une théorie ergodique cohérente pour ces mesures, avec notamment un théorème de décomposition ergodique. Il existe de plus une notion de mesure *ϕ^u-harmonique totalement invariante* obtenue en combinant une mesure transverse invariante par holonomie avec une fonction ϕ^u-harmonique canoniquement définie (voir le théorème 5.3.5).

Ces deux exemples doivent donc être traités en parallèle : nous voyons donc que dans les deux cas, il y a une notion d'harmonicité pour des mesures sur $\mathscr{F}$, qui est associée à une notion de mesures de Gibbs pour un certain potentiel.

Conditions suffisantes pour l'existence de mesures transverses invariantes. Pour prouver l'unicité des mesures limites de grands disques dans le cas de la courbure constante, nous avons utilisé un argument algébrique, à savoir que si une mesure de Borel dans $T^1\mathbb{H}$ est invariante par l'action jointe des deux flots horocycliques, alors, à une constante multiplicative près, c'est la mesure de Liouville. Lorsque la courbure est variable, nous ne disposons plus d'une description algébrique aussi commode. Nous avons donc besoin d'un résultat ergodique, qui doit être vu comme une sophistication de cet argument, pour généraliser ce résultat.

Un état de s-Gibbs pour G_t est un état de u-Gibbs pour G_{-t} (en d'autres termes il possède une désintégration absolument continue dans les variétés stables). Un état de su-Gibbs pour G_t est une mesure qui est à la fois un état de u-Gibbs et de s-Gibbs. Nous prouvons alors le théorème suivant, en n'utilisant que les propriétés d'absolue continuité des feuilletages stables et instables (voir le théorème 5.4.1).

Théorème 4. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée dont les feuilles sont négativement courbées. Alors si le flot géodésique feuilleté admet un état de su-Gibbs, $\mathscr{F}$ a une mesure transverse invariante.*

La philosophie derrière ce théorème sera reprise dans nos résultats d'unicité : c'est que si l'on prescrit la classe de mesure à la fois dans les variétés stables et instables, alors il existe une mesure transverse invariante.

De plus, ce théorème implique que les flots géodésiques feuilletés de la plupart des feuilletages dont les feuilles sont courbées négativement ne préserve aucune mesure lisse. En effet, supposons que la métrique feuilletée vienne d'une métrique Riemannienne ambiante sur M. Par absolue continuité des feuilletages stable et instable, toute mesure lisse sur $T^1\mathscr{F}$ a une désintégration absolument continue dans les feuilles de $\mathscr{W}^s$, ansi que dans celles de $\mathscr{W}^u$. Nous renvoyons également le lecteur au travail de Walczak sur la dynamique des flots géodésiques feuilletés [Wa]. Il a prouvé que lorsque la variété feuilletée $(M,\mathscr{F})$ est munie d'une métrique Riemannienne (dans ce travail, les feuilles ne sont pas supposées courbées négativement), le flot géodésique feuilleté préserve le volume Riemannien de $T^1\mathscr{F}$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est transversalement minimal.

Corollaire 1. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété Riemannienne close feuilletée, de sorte que pour la métrique induite, toutes les feuilles soient courbées négativement. Supposons que le flot géodésique feuilleté de $T^1\mathscr{F}$ préserve une mesure lisse. Alors cette mesure est totalement invariante : c'est localement le produit de la mesure de Liouville des feuilles par une mesure transverse invariante.*

De ce théorème simple, nous déduisons une généralisation d'un résultat de Matsumoto (voir [Mat]), avec une preuve très différente, en termes de mesures ϕ^u-harmoniques. Pour toute mesure ϕ^u-harmonique il est possible, étant donnée une feuille typique, d'étendre les densités locales à toute la feuille : aux densités globales ainsi définies est alors associée une classe de mesure sur la sphère à l'infini (rappelons que par définition, une fonction ϕ^u-harmonique a une représentation intégrale en termes du noyau k^u), qui ne dépend que de la feuille : nous l'appelons *classe caractéristique*. La densité ainsi étendue à la feuille s'appelle *fonction caractéristique* de la feuille. Nous prouvons alors le théorème suivant (rappelons que la classe de visibilité sur la sphère à l'infini est obtenue en poussant en avant la mesure de Lebesgue par les identifications naturelles $T^1_z\widetilde{L} \simeq \widetilde{L}(\infty)$) :

Théorème 5. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée dont les feuilles sont négativement courbées. Soit m une mesure ϕ^u-harmonique qui n'est pas totalement invariante. Alors pour m-presque toute feuille L, la classe de mesure caractéristique associée $[\eta_L]$ sur $\widetilde{L}(\infty)$ est singulière par rapport à la classe de visibilité.*

Dans le cas particulier où les feuilles sont hyperboliques, on retrouve alors le résultat suivant de Matsumoto, par une méthode n'utilisant que l'absolue continuité des feuilletages stable et instable :

Corollaire 2 (Matsumoto)**.** *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée par des variétés hyperboliques. Soit m une mesure harmonique qui n'est pas totalement invariante. Alors pour m-presque toute feuille L, la classe de mesure caractéristique associée $[\eta_L]$ sur $\widetilde{L}(\infty)$ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.*

De plus la fonction harmonique caractéristique d'une feuille typique n'est pas bornée.

4 | Mesures de Gibbs et mesures F-harmoniques pour les suspensions

Dans ce paragraphe, nous ne considérons que des feuilletages transverses à une fibration au dessus d'une base close négativement courbée, et dont les fibres sont compactes. Nous paramétrons les feuilles par la métrique de la base, c'est-à-dire que nous relevons la métrique de la base dans les feuilles via la fibration. La base sera notée B, et le revêtement universel Riemannien, N.

Mesures de Gibbs. Lorsque nous avons une base B courbée négativement, le flot géodésique sur T^1B est naturellement un flot d'Anosov topologiquement mélangeant : il possède donc un unique état de Gibbs pour chaque potentiel Hölder $F : T^1B \to \mathbb{R}$. Une caractérisation de l'état de Gibbs associé à F est la suivante. C'est la seule mesure invariante par le flot g_t dont la classe des mesures conditionnelles dans les feuilles instable est prescrite : elle est déterminée par l'unique famille $(\lambda^u_{F,v})_{v\in T^1B}$ satisfaisant la formule d'absolue continuité suivante :

$$\frac{d\left[g_T * \lambda^u_{F,g_{-T}(v)}\right]}{d\lambda^u_{F,v}}(p) = \exp\left[\int_0^T (F\circ g_{-t}(v) - P(F))\,dt\right],$$

où $P(F)$ représente la pression du potentiel.

En considérant alors un fibré feuilleté $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ paramétré par B, nous pouvons relever à M : le flot géodésique, ses distributions et variétés invariantes, le potentiel F, ainsi que la famille de mesures ci-dessus, obtenant ainsi le flot géodésique feuilleté G_t sur $T^1\mathscr{F}$, ses feuilletages invariants $\overline{\mathscr{W}}^\star$ ($\star = s, u, cs, cu$), un potentiel $\overline{F} : T^1\mathscr{F} \to \mathbb{R}$, ainsi que les familles de mesures $(\bar\lambda^u_{F,v})_{v\in T^1\mathscr{F}}$. Nous pouvons alors définir une mesure de Gibbs associée au potentiel $\overline{F}$ comme une mesure invariante par G_t, dont la classe de mesure dans les variétés instables est prescrite par $\bar\lambda^u_{F,v}$. L'existence de ces mesures est prouvée en détail au chapitre VI (voir l'énoncé du théorème 6.1.2 pour plus de précisions).

Mesures F-harmoniques. Nous pouvons associer à F le noyau suivant, analogue du noyau de Poisson (nous notons $\widetilde{F} : T^1N \to \mathbb{R}$ le relevé de F au revêtement) :

$$k^F(o,z;\xi) = \exp\left[\int_\xi^z \widetilde{F} - \int_\xi^o \widetilde{F}\right]\exp[-P(F)\beta_\xi(o,z)].$$

Les noyaux de Poisson et k^u sont des exemples de noyaux associés à un potentiel ; si l'on prend le potentiel nul, le noyau qui lui est associé est donné par $e^{-h\beta_\xi(o,z)}$, où h représente l'entropie topologique du flot géodésique.

Ledrappier a associé à ce noyau une famille de mesures de Borel sur la sphère à l'infini $N(\infty)$, notée $(\nu_z^F)_{z\in N}$. Elles sont caractérisées à multiplication par une constante positive près par la condition d'équivariance $\gamma * \nu_z^F = \nu_{\gamma z}^F$ pour $z \in N$ et $\gamma \in \pi_1(B)$, et $k^F(o,z;\xi) = d\nu_z^F / d\nu_o^F(\xi)$ pour $(o,z,\xi) \in N \times N \times N(\infty)$.

Une fonction F-harmonique sur N est alors une fonction qui s'écrit comme intégrale du noyau k^F contre une mesure finie de Borel à l'infini. La fonction $\widetilde{h}_0 : z \in N \mapsto \mathrm{mass}(\nu_z^F)$ est un exemple de fonction F-harmonique qui passe au quotient par l'action du groupe $\pi_1(B)$: nous prouverons dans la suite que c'est la seule à multiplication par une constante près. Une mesure F-harmonique pour le feuilletage $\mathscr{F}$ est alors une mesure qui a une désintégration équivalente à Lebesgue dans les feuilles de $\mathscr{F}$, et dont les densités locales sont des fonctions F-harmoniques. L'existence de ces mesures n'est a priori pas évidente, elle est conséquence du théorème suivant :

Théorème 6. *Soit $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté où B est une variété Riemannienne close et courbée négativement, et V est une variété compacte. Supposons que les feuilles de $\mathscr{F}$ soient localement isométriques à B. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder, et $\overline{F} : T^1\mathscr{F} \to \mathbb{R}$ un relevé. Alors il existe une correspondance bijective entre mesures de Gibbs associées au potentiel $\overline{F}$ et mesures F-harmoniques.*

La preuve de ce résultat nécessite les mêmes ingrédients que celles des théorèmes 2 et 3. En utilisant leur représentation intégrale, il s'agit de "dérouler" les densités des mesures F-harmoniques afin de les remonter canoniquement au fibré unitaire tangent, puis, afin d'obtenir une mesure invariante par le flot géodésique, de les reparamétrer dans les feuilles instables.

Un théorème à la Fatou. Afin de prouver que cette notion de F-harmonicité n'est pas si artificielle qu'il n'y paraît, et d'établir quelques liens avec la théorie du potentiel usuel, nous prouvons au chapitre VI un théorème de Fatou sur la convergence non-tangentielle des fonctions F-harmoniques. L'énoncé est le suivant.

Théorème 7. *Soit B une variété Riemannienne close et courbée négativement, et N son revêtement universel Riemannien. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder qui se relève en $\widetilde{F} : T^1N \to \mathbb{R}$. Soit enfin $h : N \to \mathbb{R}$ la fonction F-harmonique définie par la formule suivante :*

$$h(z) = \int_{N(\infty)} k^F(o,z;\xi)\, d\eta(\xi),$$

où η est une mesure finie sur $N(\infty)$, qui admet la décomposition de Lebesgue suivante par rapport à $\nu_o^F : \eta = f\nu_o^F + \eta_s$, où f est une fonction ν_o^F-intégrable, et η_s est une mesure singulière par rapport à ν_o^F. Alors :

1. *pour ν_o^F-presque tout $\xi \in N(\infty)$, on a :*
$$\frac{h(z)}{\widetilde{h}_o(z)} \to f(\xi),$$
lorsque z converge non-tangentiellement vers ξ ;
2. *pour η_s-presque tout $\xi \in N(\infty)$, on a :*
$$h(z) \to \infty$$
lorsque z converge non-tangentiellement vers ξ.

La preuve de ce théorème requiert l'utilisation de techniques devenues incontournables dans l'étude ergodique du flot géodésique, et qui tournent autour du lemme de l'ombre (voir le théorème 6.3.5).

5 | Résultats d'unicité et d'équidistribution

Résultats d'unicité. Nous pouvons alors donner une preuve du théorème 1 qui unifie les trois cas en prouvant le théorème d'unicité suivant :

Théorème 8. *Soit* $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté projectif, dont la base* B *est une variété Riemannienne close et courbée négativement, et dont les feuilles de* $\mathscr{F}$ *sont localement isométriques à* B*. Supposons de plus qu'il n'y ait pas de mesure sur* $\mathbb{CP}^1$ *qui soit invariante par holonomie. Alors pour tout potentiel Hölder* $F : B \to \mathbb{R}$ *:*
- *il existe une unique mesure de Gibbs associée au potentiel* $\overline{F}$ *;*
- *il existe une unique mesure* F*-harmonique pour le feuilletage* $\mathscr{F}$*.*

Moyennes pondérées de grandes boules. Depuis les travaux de Goodman-Plante [GPl], poursuivis par [AR, K2, Kn, Sc], il est devenu classique de s'intéresser à des limites de volumes, normalisés par un cocycle, de grandes boules dans les feuilles d'un feuilletage. Nous nous intéressons aussi à ce problème dans cette thèse : par exemple, il est possible de voir, comme conséquence du théorème suivant, que sous les hypothèses du théorème 8, il existe une unique mesure sur M s'écrivant comme limite de volumes normalisés de grandes boules. De plus, cette mesure est l'unique mesure 0-harmonique (celle qui est associée au potentiel nul).

Plus généralement, lorsque $F : T^1B \to \mathbb{R}$ est un potentiel Höldérien, il est possible de considérer le poids suivant :

$$\kappa^F(o, z) = \exp\left[\int_o^z \widetilde{F}\right],$$

où l'intégrale est prise sur la géodésique *dirigée* de o vers $z \in N$. Nous pouvons alors, lorsque $x \in M$, et $\mathrm{proj}_x : (N, o) \to (L_x, x)$ est le revêtement universel Riemannien de la feuille correspondante, considérer la *moyenne pondérée par le cocycle* sur la boule centrée en x par :

$$\mu^F_{x,R} = \mathrm{proj}_x * \left(\frac{\kappa^F(o, y)\mathrm{Leb}_{|B(o,R)}(y)}{\int_{B(o,R)} \kappa^F(o, y)\, d\mathrm{Leb}(y)}\right).$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 9. *Soit* $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté projectif au dessus d'une variété Riemannienne close et courbée négativement, et dont les feuilles sont localement isométriques à* B*. Supposons de plus qu'il n'y ait pas de mesure sur* $\mathbb{CP}^1$ *invariante par le groupe d'holonomie. Soit* $F : T^1B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder dont la pression est positive. Alors, pour toutes suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ *et* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendant vers l'infini, la suite de mesures* $\mu^F_{x_n,R_n}$ *converge vers l'unique mesure* F*-harmonique pour* $\mathscr{F}$*.*

Résultats d'équidistribution. Il y a un autre point de vue que nous désirons explorer : c'est celui des actions de groupes paramétrées par une métrique Riemannienne de courbure négative. Nous regardons une action projective donnée par $\rho : \pi_1(B) \to PSL_2(\mathbb{C})$, où B est une variété Riemannienne close courbée négativement. La métrique permet alors de mettre une fonction distance sur $\pi_1(B)$ en posant, pour le choix d'un point base $o \in N$, et deux éléments $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(B)$, $d(\gamma_1, \gamma_2) = \mathrm{dist}(\gamma_1 o, \gamma_2(o))$. Notons alors B_R la boule centrée en l'identité de rayon R pour cette distance. Nous pouvons alors regarder les moyennes suivantes, avec $x \in \mathbb{CP}^1$:

$$\theta_R = \frac{1}{|B_R|} \sum_{\gamma \in B_R} \delta_{\rho(\gamma)x},$$

ou mieux : si $F : T^1B \to \mathbb{R}$ est un potentiel Hölder, nous pouvons considérer le poids sur $\pi_1(B)$ donné par $\kappa^F(\gamma) = \kappa^F(o, \gamma o)$, et regarder les moyennes pondérées suivantes :

$$\theta_{F,R} = \frac{1}{\sum_{\gamma \in B_R} \kappa^F(\gamma)} \sum_{\gamma \in B_R} \kappa^F(\gamma) \delta_{\rho(\gamma)^{-1}x}.$$

Sous l'hypothèse du théorème 8, il n'y a qu'une mesure F-harmonique notée m_F, et nous pouvons la désintégrer dans les fibres, obtenant ainsi une famille de mesures $(m_{F,p})_{p\in B}$ dans les fibres $V_p \simeq \mathbb{CP}^1$. Nous pouvons alors prouver le théorème suivant qui donne les mesures conditionnelles des mesures F-harmoniques comme limites des moyennes pondérées définies plus haut :

Théorème 10. *Soit B une variété close courbée négativement, et $\rho : \pi_1(B) \to PSL_2(\mathbb{C})$ une représentation projective qui ne laisse invariante aucune mesure de probabilité sur $\mathbb{CP}^1$. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder dont la pression est positive. Alors, lorsque $p \in B$ et $x \in V_p$ la mesure $\theta_{F,R}$ converge vers $m_{F,p}$ quand R croît indéfiniment.*

6 | Discrétisation des mesures harmoniques

Mesures harmoniques, mesures stationnaires. Nous avons déjà mentionné que lorsqu'un feuilletage est transverse à une fibration, l'holonomie est décrite par l'action d'un groupe sur la fibre. Il y a alors deux notions de dynamique aléatoire : la première, sur le feuilletage, consiste à regarder la transformation d'holonomie le long d'un chemin Brownien, et la seconde, sur le groupe, consiste à tirer aléatoirement les éléments du groupe d'holonomie de façon indépendante et identiquement distribuée, et à regarder l'orbite aléatoire d'un point de la fibre.

Nous avons alors deux mesures qui décrivent chacune l'une des dynamiques aléatoires considérées : les mesures harmoniques pour le feuilletage, et les mesures stationnaires pour l'action du groupe. Plus précisément si un groupe Γ, est muni d'une mesure de probabilité μ, et agit par homéomorphismes sur un espace compact X, on dit qu'une mesure de probabilité ν sur X est μ-stationnaire si :

$$\nu = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma) \gamma * \nu.$$

L'existence de mesures stationnaires découle d'un argument classique à la Krylov-Bogolubov, lorsque l'espace X est compact.

Puisque l'étude des mesures stationnaires pour les actions de groupes est assez bien développée depuis les travaux de Furstenberg [Fu1], et qu'en particulier, nous avons des critères explicites pour l'uinicité de mesures stationnaires pour des actions projectives (voir les travaux de Guivarc'h-Raugi [GR]), il a paru naturel d'établir une correspondance bijective entre mesures harmoniques et mesures stationnaires. Nous prouvons donc au chapitre 3 le théorème suivant :

Théorème 11. *Soit B une variété Riemannienne de classe C^∞, de volume fini et à géométrie bornée. Alors il existe une mesure de probabilité μ sur $\pi_1(B)$ de support total, telle que pour toute variété compacte V et toute représentation $\rho : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(V)$, il y ait une correspondance bijective entre les mesures harmoniques pour le feuilletage suspension paramétré par la métrique de la base, et les mesures μ-stationnaires sur V pour l'action définie par ρ.*

Plus précisément, une mesure harmonique pour un tel feuilletage se projette sur la mesure de Lebesgue, et nous pouvons donc la désintégrer dans les fibre par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous prouvons alors qu'une mesure est harmonique pour le feuilletage suspension si et seulement si ses mesures conditionnelles dans les fibres sont stationnaires pour l'action du groupe d'holonomie. Notons que l'existence d'une mesure harmonique dans le cas où la base est non compacte ne suit pas directement du théorème de Garnett, mais découle du théorème précédent grâce à l'existence systématique de mesures stationnaires. La mesure μ est la mesure qui provient de la discrétisation du mouvement Brownien sur le revêtement universel de B : nous renvoyons aux travaux de Furstenberg [Fu2], Lyons-Sullivan [LS], et Ballmann-Ledrappier [BaL]. Nous déduisons des travaux de Guivarc'h-Raugi le résultat d'unicité suivant :

Théorème 12. *Soit $d \geq 2$ et $\rho : \pi_1(B) \to PSL_d(\mathbb{C})$ une représentation projective où l'on suppose que la base B vérifie l'une des conditions suivantes :*
- *B est une variété Riemannienne close et courbée négativement ;*
- *B est une surface Riemannienne d'aire finie, de géométrie bornée et dont la courbure est pincée entre deux constantes négatives.*

Supposons que la représentation ρ soit contractante, fortement irréductible, et, dans le second cas, qu'elle soit de plus parabolique. Alors le feuilletage obtenu par suspension de ρ possède une unique mesure harmonique.

Les termes précis "contractant", "fortement irréductible", et "parabolique" seront définis au chapitre III. Mentionnons juste que lorsqu'une représentation dans $PSL_2(\mathbb{C})$ ne préserve aucune mesure de probabilité, alors elle est contractante et irréductible.

Nous proposons également au chapitre III une variation autour de ce thème. Que se passe-t-il si la base ne paramètre plus les feuilles ? Dans ce cas où les feuilles sont paramétrées par la base, la probabilité de tirer tel ou tel élément du groupe d'holonomie ne dépend pas de l'endroit où l'on se trouve dans la fibre, mais juste de la structure Riemannienne de la base. Dans le cas contraire, nous pouvons toujours jouer le jeu de la discrétisation du Brownien, mais ce jeu se fait feuille à feuille. En d'autres termes, la discrétisation du mouvement Brownien dans les feuilles donne également, étant donné un point de la fibre, une probabilité de tirer tel ou tel élément du groupe d'holonomie. Mais cette probabilité dépend de l'endroit où l'on se trouve dans la feuille. Nous ne tirons plus nos éléments du groupe de façon indépendante et identiquement distribuée, mais en suivant une *chaîne de Markov*.

Théorème 13. *Soit $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté, muni d'une métrique feuilletée variant continûment avec le paramètre transverse. Alors il existe une chaîne de Markov caractérisée par un noyau de transition $P = (P(x,.))_{x\in V}$, où chaque $P(x,.)$ est une mesure de probabilité de support total sur $\pi_1(B)$, telle qu'il y ait une correspondance bijective entre les mesures harmoniques pour $\mathscr{F}$ et les mesures de probabilité sur la fibre qui sont P-stationnaires.*

Nous avons décidé d'inclure ce théorème dans cette thèse car il fournit un cadre géométrique où les travaux de Guivarc'h sur les produits de matrices dirigés par une chaîne de Markov (voir par exemple [Gu]), apparaissent très naturellement et devraient pouvoir s'appliquer. En revanche, ces travaux requièrent une hypothèse de continuité du noyau de transition : ce que nous n'obtenons pas, et c'est la raison pour laquelle nous n'énonçons pas de résultats d'unicité, lorsque la base ne paramètre pas les feuilles. Prouver la continuité du noyau de transition viendrait à répondre à la question suivante, qui semble raisonnable, et qui fera l'objet de recherches futures :

Question. Est-il possible de discrétiser le mouvement Brownien sur une variété Riemannienne complète à géométrie bornée de façon à obtenir des poids qui varient continûment avec la métrique ?

7 | Exposant de Lyapunov et dimension de Hausdorff transverses dans le cas fuchsien.

Lorsque g_1 et g_2 sont deux métriques hyperboliques sur une même surface de Riemann compacte de genre ≥ 2, il est toujours possible d'associer un feuilletage transverse à un fibré en sphères à ce couple de métriques. En effet, ces métriques peuvent être uniformisées par deux copies de $\pi_1(B)$, dans le groupe d'isométries directe du disque de Poincaré $\mathbb{D}$, $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$. Nous obtenons ainsi un isomorphisme $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \Gamma_2 \subset PSL_2(\mathbb{C})$, où nous munissons Σ de la métrique g_1.

Nous avons alors, associé à ce couple de métriques hyperboliques, une correspondance au bord $h : S_\infty \to S_\infty$ qui conjugue les actions de Γ_1 et Γ_2 sur le cercle à l'infini S_∞. En identifiant de manière équivariante $T^1\mathbb{D}$ à l'ensemble des triplets orientés (pour l'ordre trigonométrique) sur S_∞, nous voyons que cette correspondance nous permet de définir une équivalence orbitale du flot géodésique, qui, par ergodicité de la mesure de Liouville, vient avec un reparamétrage moyen λ (voir le dernier chapitre pour plus de précisions). Un résultat de Mostow dit que la correspondance au bord h est absolument continue si et seulement si c'est une homographie, et dans ce cas, les métriques g_1 et g_2 représentent le même point dans l'espace de Teichmüller. De même, un résultat de Thurston, énoncé dans [W], dit que ce reparamétrage moyen λ est ≥ 1 avec égalité si et seulement si les métriques représentent le même point dans l'espace de Teichmüller. Nous proposons alors une preuve géométrique élémentaire du théorème suivant :

Théorème 14. *Soit g_1 et g_2 deux métriques hyperboliques sur la même surface de Riemann compacte Σ. Soit $h : S_\infty \to S_\infty$ la correspondance au bord associée, et λ le reparamétrage moyen du flot géodésique. Alors nous avons :*

$$\mathrm{HD}[h*(d\theta)] = \frac{1}{\lambda},$$

HD *représentant la dimension de Hausdorff de la mesure. En particulier, lorsque g_1 et g_2 sont différentes, on a* $\mathrm{HD}[h*(d\theta)] < 1$.

Ce théorème nous permet de prouver la résultat suivant concernant le feuilletage suspension :

Théorème 15. *Soit g_1 et g_2 deux métriques hyperboliques sur une surface de Riemann compacte Σ. Le fibré feuilleté obtenu par suspension de l'isomorphisme entre les groupes uniformisants $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2 < PSL_2(\mathbb{C})$ est noté $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$. Alors :*

- *l'exposant de Lyapunov transverse du flot géodésique pour la mesure SRB est égal à l'opposé du reparamétrage moyen $-\lambda$;*
- *la dimension transverse de la mesure harmonique est donnée par λ^{-1} ;*
- *en conséquence, nous avons la formule suivante :*

1=*(dimension transverse de la mesure harmonique)*× |*exposant de Lyapunov transverse de la mesure SRB*|.

Cette formule n'est pas anodine. Elle suggère qu'il y a alors une quantité invariante qui ne dépend que de la dynamique de la représentation choisie, et que nous soupçonnons être l'entropie transverse du flot géodésique feuilletée. Nous espérons pourvoir établir des liens plus précis entre entropie et mesures de Gibbs.

8 | Plan de la thèse

Cette thèse est découpée en huit chapitres. Dans un premier chapitre, nous présentons les outils dont nous nous servirons tout au long de cette thèse : géométrie à courbure négative, flots d'Anosov et partitions de Markov, feuilletages, mesures transverses, désintégration et mesures harmoniques.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des états de Gibbs pour les flots d'Anosov. En particulier, nous montrons comment utiliser une construction à la Margulis pour obtenir la structure de produit local des états de Gibbs. Ce résultat est sans doute folklorique, mais d'une part, nous n'en avons pas trouvé trace dans la littérature, d'autre part, nous avons l'espoir que cette construction puisse s'adapter à des situations où on n'a pas de description symbolique claire de la dynamique (hyperbolicité partielle ou feuilletée), et enfin, le rappel de la construction de Margulis est un prétexte pour prouver le théorème suivant :

Théorème 16. *Soit B une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2 $\varphi_t : B \to B$. Supposons qu'en restriction à une feuille instable, la densité de l'unique état de u-Gibbs de φ_t soit bornée. Alors l'état de u-Gibbs coïncide avec la mesure de Bowen-Margulis.*

Le troisième chapitre est dédié à la discrétisation des mesures harmoniques : on y prouve les théorèmes 11, 12 et 13.

Le quatrième chapitre est consacré au lien entre mesures harmoniques et mesures de H-Gibbs. Nous traitons à part le cas des feuilletages par surfaces hyperboliques, donnant ainsi une preuve simple et courte du théorème de Bakhtin-Martínez, puis nous définissons les mesures de H-Gibbs, prouvons leur existence, puis le théorème 2.

Nous exposons au cinquième chapitre la théorie de l'*hyperbolicité feuilletée* de [BGM], étudions les mesures de u-Gibbs, et prouvons le théorème 4. Nous y développons aussi la notion de mesure ϕ^u-harmonique, prouvons le théorème 3, et en déduisons des théorèmes de base sur ces mesures comme leur décomposition ergodique. Enfin, nous généralisons un résultat de Matsumoto en prouvant le théorème 5.

Dans le sixième chapitre, nous développons la notion de mesures de Gibbs pour les flots hyperboliques feuilletés obtenus en remontant un flot d'Anosov aux feuilles d'un feuilletage suspension. Nous développons également la notion de fonction et de mesure F-harmoniques pour des fibrés feuilletés au dessus d'une base négativement courbées. Nous montrons l'équivalence de ces notions dans ce cadre : c'est l'objet du théorème 6. Nous poursuivons ensuite l'étude des fonctions F-harmoniques en prouvant notre théorème à la Fatou (le théorème 7).

L'objet du septième chapitre est la preuve des résultats d'unicité dans le cadre des fibré feuilletés au dessus d'une base portant un flot d'Anosov : nous y prouvons notamment un résultat d'unique ergodicité pour les feuilletages stables et instables du flot hyperbolique feuilleté. Nous prouvons en particulier le théorème 8, dont nous donnons des preuves plus simples dans le cadre des états de u-Gibbs (en utilisant les résultats du quatrième chapitre), ainsi que dans celui des mesures harmoniques (en utilisant un principe de la moyenne pour les mesures conditionnelles des mesures harmoniques pour les fibrés feuilletés : voir le lemme 7.1.23). Nous prouvons également le théorème 9 sur les limites des moyennes pondérées de grands disques, ainsi que le résultat d'équidistribution (théorème 10).

Enfin, au dernier chapitre, nous étudions l'exemple particulier des représentations fuchsiennes et quasi-fuchsiennes. Ce sera l'occasion de prouver des résultats de géométrie hyperbolique élementaires de façon à démontrer le théorème 14. En analysant la dynamique du flot géodésique feuilleté dans le cas fuchsien, nous en déduirons le théorème 15. Finalement, nous y prouvons la dernière partie du théorème 1.

Chapitre I

Préliminaires et boîte à outils

1 | Géométrie à courbure négative

1.1 – Variétés à courbure pincée

Dans la suite, N désignera une variété connexe et simplement connexe de classe C^∞, et de dimension $d \geq 2$. Nous supposons que la courbure sectionnelle de N est partout pincée entre deux constantes négatives $-b^2 \leq -a^2$.

Dans toute cette thèse, par *variété close*, nous entendrons une variété connexe, compacte, sans bord et de classe C^∞.

La sphère à l'infini. Par un théorème d'Hadamard, N est difféomorphe à une boule de dimension d, et peut être compactifiée en ajoutant une sphère topologique de dimension $(d-1)$. Cette sphère, notée dans la suite $N(\infty)$, est la classe d'équivalence des rayons géodésiques pour la relation "rester à distance bornée" (une telle classe est appelée classe asymptotique). Puisque la courbure sectionnelle a une borne supérieure négative, deux rayons géodésiques étant dans la même classe asymptotique convergent exponentiellement vite.

Nous noterons dans la suite T^1N le fibré unitaire tangent à N, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à N. Pour un point base $o \in N$, T^1_oN désigne la fibre unitaire tangente à o. C'est naturellement une sphère $(d-1)$-dimensionnelle, munie d'une distance angulaire notée $\angle_o$. Un vecteur $v \in T^1N$ détermine une unique géodésique paramétrée par longueur d'arc que nous noterons c_v : ses deux extrémités dans $N(\infty)$ seront notées $c_v(-\infty)$ et $c_v(\infty)$.

Nous noterons $\pi_o : T^1_oN \to N(\infty)$ la projection qui associe à tout vecteur unnitaire v basé en o l'extrémité $c_v(-\infty)$. Nous faisons ce choix d'identification car nous nous intéresserons à une trivialisation du feuilletage centre-instable du flot géodésique, et non à une trivialisation du feuilletage centre-stable.

Les applications $\pi_{o'}^{-1} \circ \pi_o : T^1_oN \to T^1_{o'}N$ sont des applications Hölder pour les métriques angulaires correspondantes. Ainsi, il existe une famille de distances angulaires sur $N(\infty)$, que nous noterons encore de façon abusive $(\angle_z)_{z\in N}$, et qui définissent une structure de Hölder sur $N(\infty)$ (voir par exemple [AS] pour tout ceci).

Topologie conique et convergence non-tangentielle. L'ensemble $\overline{N} = N \cup N(\infty)$ est muni d'une topologie naturelle appelée la *topologie conique* : nous la décrivons ici. Le cône autour d'un vecteur unitaire v basé en un point o, et d'angle θ est défini comme :

$$C_o(v,\theta) = \{x \in N | \angle_o(v, v_{ox}) \leq \theta\},$$

où v_{ox} est le vecteur basé en o qui pointe vers x. Les cônes tronqués sont définis par $T_o(v,\theta,R) = C_o(v,\theta) \setminus B(o,R)$ où $B(o,R)$ est la boule géodésique centrée en o et de rayon $R > 0$. Les boules géodésiques, et les cônes tronqués engendrent une topologie sur $\overline{N}$, appelée topologie conique, et devient ainsi homéomorphe à une boule d-dimensionelle fermée.

Pour tout $\xi \in N(\infty)$, et tout rayon géodésique c pointant vers ξ, nous définissons un *cône non-tangentiel* en ξ comme un R-voisinage de c pour un certain $R > 0$. Nous disons que ξ est la *limite non-tangentielle* d'une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de points de N, si x_i converge vers ξ dans la topologie conique, tout en restant dans un cône non-tangentiel. Puisque deux rayons géodésiques restant dans la même classe asymptotique converge exponentiellement vite, la notion de limite non-tangentielle ne dépend pas du choix particulier d'un rayon géodésique dans cette classe.

L'action des isométries à l'infini. Le groupe des isométries Isom(N) agit sur T^1N par les différentielles. Via les identifications $\pi_z : T^1_z N \to N(\infty)$, nous en déduisons une action naturelle de Isom(N) sur la sphère $N(\infty)$.

Cocycle de Busemann et horosphères. Pour $\xi \in N(\infty)$, nous définissons le *cocycle de Busemann* comme :

$$\beta_\xi(y,z) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(c(t),z) - \mathrm{dist}(c(t),y),$$

où c est n'importe quel rayon géodésique paramétré par longueur d'arc convergeant vers ξ. Il est prouvé dans [HI] que, lorsque ξ est fixé, ces fonctions sont C^2 (les auteurs attribuent ce résultat à Eberlein). Nous avons clairement $\beta_\xi(x,x) = 0$ pour tout $x \in N$, ainsi que les relations de cocycles suivantes pour $x,y,z \in N$ et $\xi \in N(\infty)$:

$$\beta_\xi(x,y) + \beta_\xi(y,z) = \beta_\xi(x,z). \tag{1.1.1}$$

Les *horosphères* sont par définition les niveaux de ce cocycles. Plus précisément, nous disons que x appartient à l'horosphère centrée en ξ et passant par o, que nous notons $H_\xi(o)$, si $\beta_\xi(o,x) = 0$ (bien sûr, par définition du cocycle de Busemann, cette relation est transitive). Ces variétés sont alors de classe C^2.

1.2 – Théorèmes de comparaison

Triangle de comparaison. La courbure de N est pincée entre deux constantes négatives : un bon outil pour effectuer des estimées géométriques est la comparaison avec les modèles de courbure constante. Nous notons, lorsque $\kappa < 0$, N_κ l'espace complet, connexe et simplement connexe à courbure sectionnelle constante égale à κ.

Un triangle géodésique (ou simplement triangle lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité) consiste en un choix de trois points z_1, z_2, z_3, ainsi que des trois rayons géodésiques reliant ces trois sommets. Soit Δ un tel triangle. Un *triangle de comparaison* dans la géométrie N_κ est un triangle $\overline{\Delta}$ dont les sommets $\bar z_1, \bar z_2, \bar z_3$ vérifient $\mathrm{dist}(\bar z_i, \bar z_j) = \mathrm{dist}(z_i, z_j)$ pour $i \neq j$. Il est à noter que dans l'espace à courbure constante, un tel triangle de comparaison est unique à isométrie près.

Un point $\bar x \in [\bar z_i, \bar z_j]$ est appelé *point de comparaison* pour $x \in [z_i, z_j]$ si $\mathrm{dist}(\bar x, \bar z_i) = \mathrm{dist}(x, z_i)$.

Borne supérieure de la courbure et inégalités CAT. Pour les inégalités CAT$(-a^2)$, c'est-à-dire la comparaison avec la géométrie de courbure sectionnelle supérieure, nous renvoyons le lecteur à [BH].

Theorème 1.1.1 (Inégalité CAT)**.** *Soit N une variété connexe et simplement connexe de classe C^∞, et de courbure sectionnelle $\leq -a^2$. Alors pour tout triangle géodésique $\Delta(z_1,z_2,z_3)$, il existe un triangle de comparaison $\overline{\Delta}(\bar z_1, \bar z_2, \bar z_3)$ dans N_{-a^2} tels que pour tous $x, y \in \Delta$, et si $\bar x, \bar y$ sont des points de comparaison, on ait :*

$$\mathrm{dist}(x,y) \leq \mathrm{dist}(\bar x, \bar y).$$

De plus si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ désignent les angles de Δ, et $\bar\alpha_1, \bar\alpha_2, \bar\alpha_3$, ceux de $\overline{\Delta}$ qui correspondent, on a :

$$\alpha_i \leq \bar\alpha_i \quad i = 1,2,3.$$

Nous en déduisons la caractérisation suivante :

Corollaire 1.1.2. *Supposons les hypothèses du théorème précédent. Soit* $z_1, z_2, z_3 \in N$, *et* $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3 \in N_{-a^2}$ *tels que :*

- $\mathrm{dist}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \mathrm{dist}(z_1, z_2)$;
- $\mathrm{dist}(\bar{z}_1, \bar{z}_3) = \mathrm{dist}(z_1, z_3)$;
- $\widehat{\bar{z}_2\, \bar{z}_1\, \bar{z}_3} = \widehat{z_2\, z_1\, z_3}$.

Alors nous avons :

$$\mathrm{dist}(\bar{z}_2, \bar{z}_3) \leq \mathrm{dist}(z_2, z_3).$$

Borne inférieure de la courbure et théorème de Topogonov. Pour le théorème de Topogonov, c'est-à-dire la comparaison avec la géométrie de courbure sectionnelle inférieure, nous renvoyons à [CE].

Theorème 1.1.3 (Topogonov)**.** *Soit N une variété connexe et simplement connexe de classe C^∞, et de courbure sectionnelle $\geq -b^2$. Alors pour tout triangle géodésique $\Delta(z_1, z_2, z_3)$, il existe un triangle de comparaison $\overline{\Delta}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ dans N_{-b^2} tels que pour tous $x, y \in \Delta$, et si $\bar{x}, \bar{y}$ sont des points de comparaison, on ait :*

$$\mathrm{dist}(x, y) \geq \mathrm{dist}(\bar{x}, \bar{y}).$$

De plus si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ désignent les angles de Δ, et $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$, ceux de $\overline{\Delta}$ qui correspondent, on a :

$$\alpha_i \geq \bar{\alpha}_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Nous en déduisons la caractérisation suivante :

Corollaire 1.1.4. *Supposons les hypothèses du théorème précédent. Soit* $z_1, z_2, z_3 \in N$, *et* $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3 \in N_{-b^2}$ *tels que :*

- $\mathrm{dist}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \mathrm{dist}(z_1, z_2)$;
- $\mathrm{dist}(\bar{z}_1, \bar{z}_3) = \mathrm{dist}(z_1, z_3)$;
- $\widehat{\bar{z}_2\, \bar{z}_1\, \bar{z}_3} = \widehat{z_2\, z_1\, z_3}$.

Alors nous avons :

$$\mathrm{dist}(\bar{z}_2, \bar{z}_3) \geq \mathrm{dist}(z_2, z_3).$$

1.3 – Le flot géodésique

Flot géodésique et feuilletages invariants. Un vecteur unitaire $v \in T^1N$ détermine une unique géodésique. En poussant ce vecteur le long de cette géodésique à vitesse unité pendant un temps t, nous définissons une correspondance $G_t(v)$. Cela définit un flot sur T^1N que l'on appelle le flot géodésique.

Nous rappelons qu'il y a un volume invariant par le flot géodésique, que l'on appelle la mesure de Liouville, et qui vient d'une structure de contact naturelle sur T^1N.

Il est bien connu, puisque la courbure sectionnelle est pincée entre deux constantes négatives $-b^2 \leq -a^2 < 0$, qu'il existe deux sous fibrés continus E^s et E^u de TT^1N qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} e^{-bt} ||v_s|| \leq ||DG_t(v_s)|| \leq \dfrac{b}{a} e^{-at} ||v_s|| & \text{si } v_s \in E^s \text{ et } t > 0 \\ \\ \dfrac{a}{b} e^{-bt} ||v_u|| \leq ||DG_{-t}(v_u)|| \leq \dfrac{b}{a} e^{-at} ||v_u|| & \text{si } v_u \in E^u \text{ et } t > 0. \end{cases}$$

Ces sous-fibrés E^s et E^u sont, respectivement, tangents aux horosphères munies du champ de vecteur orthogonal rentrant (resp. sortant). Nous avons alors deux feuilletages, W^s et W^u tangents à aux fibrés qui sont invariants par le flot, et dont les feuilles sont déterminées dynamiquement par :

$$w \in W^s(v) \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(G_t(v), G_t(w)) = 0,$$

$$w \in W^u(v) \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(G_{-t}(v), G_{-t}(w)) = 0,$$

Il y a une involution $\iota : T^1N \to T^1N$, $v \mapsto -v$ qui échange variétés stables et variété instables.

Les variétés centre-stables et centre-instables sont par définition les saturés des variétés stables et instables dans la direction du flot. Elles forment deux feuilletages, notés $\mathscr{W}^{cs}$ et $\mathscr{W}^{cu}$, que l'on appelle les feuilletages centre-stable et centre-instable.

Identification équivariante. Nous avons vu qu'il existe une identification naturelle entre fibres unitaires tangentes et sphère à l'infini qui envoie tout vecteur unitaire sur la limite en $-\infty$ de la géodésique qu'il détermine. Nous avons ainsi une identification $T^1N \simeq N \times N(\infty)$ qui :

- conjugue l'action de $\operatorname{Isom}(N)$ sur T^1N par différentielle à l'action diagonale de $\operatorname{Isom}(N)$ sur $N \times N(\infty)$;
- trivialise le feuilletage centre-instable.

Dans ce contexte, $N \times \{\xi\}$ est identifé à une feuille centre-instable, et doit être pensée comme union de toutes les horosphères centrées en ξ. Si $o \in N$, et $\xi \in \infty$, nous pouvons rabattre la sphère à l'infini (moins ξ) sur l'horosphère $H_\xi(o)$ en considérant l'application :

$$\pi_{(o,\xi)} : N(\infty) \setminus \{\xi\} \to H_\xi(o)$$

qui associe au point $\eta \in N(\infty) \setminus \{\xi\}$ l'intersection de l'unique géodésique reliant ξ et η avec $H_\xi(o)$.

2 | Flots d'Anosov et partitions de Markov

2.1 – Flots d'Anosov.

Soit B une variété Riemannienne close. Un *flot d'Anosov* sur B est un flot, que nous supposerons toujours de classe C^2, $\varphi_t : B \to B$ dont la différentielle laisse invariante une décomposition continue du fibré tangent :

$$TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u,$$

où E^c représente la direction du flot, et E^s et E^u, que l'on appelle les fibrés *stable* et *instable*, sont respectivement uniformément contracté et dilaté par le différentielle du flot. Plus précisément, il existe des constantes uniformes $C_s, C_u > 0$, $\chi_u > 0$, $\chi_s < 0$ telles que :

$$\begin{cases} \|D\varphi_t(v_s)\| \leq C_s e^{t\chi_s}\|v_s\| & \text{si } v_s \in E^s \text{ et } t > 0 \\ \|D\varphi_{-t}(v_u)\| \leq C_u e^{-t\chi_u}\|v_u\| & \text{si } v_u \in E^u \text{ et } t > 0 \end{cases}. \tag{1.2.2}$$

Il est maintenant classique, (voir [An, HPS]) que les fibrés $E^{cu} = E^c \oplus E^u$, $E^{cs} = E^c \oplus E^s$, E^u et E^s sont uniquement intégrables. Les variétés intégrales sont alors, comme le flot, de classe C^2, et forment des feuilletages de B notés respectivement $\mathscr{W}^{cu}$, $\mathscr{W}^{cs}$, $\mathscr{W}^u$ et $\mathscr{W}^s$ qui sont invariants par le flot, et que l'on nomme respectivement feuilletages *centre-instable, centre-stable, fortement instable* et *fortement* *stable* (en pratique nous appellerons les deux derniers feuilletages tout simplement instable et stable). Pour $x \in M$, les feuilles stables et instables ont la signification dynamique suivante :

$$W^s(p) = \{q \in M | \lim_{t \to \infty} \mathrm{dist}(\varphi_t(p), \varphi_t(q)) = 0\},$$
$$W^u(p) = \{q \in M | \lim_{t \to \infty} \mathrm{dist}(\varphi_{-t}(p), \varphi_{-t}(q)) = 0\}.$$

Notation. Dans le cas particulier des applications d'holonomie le long des feuilletages invariants, nous adopterons la notation suivante :

$$\mathrm{hol}^{\star}_{T_1 \to T_2}$$

où $\star = cu, cs, u, s$, et T_1, T_2 sont des petites sections transverses à $\mathscr{W}^\star$. Cette application est alors définie sur un petit ouvert relativement compact $S_1 \subset T_1$. Lorsque T_1 et T_2 sont des trasnversales incluses dans l'un des feuilletages invariant, nous noterons aussi souvent :

$$\mathrm{hol}^{\star}_{p_1 \to p_2}.$$

où p_1, et p_2 appartiennent à la même feuille de $\mathscr{W}^\star$.

Les feuilletages invariants sont *absolument continus* dans le sens que leurs transformations d'holonomie préservent la classe de Lebesgue.

Nous montrerons un intérêt tout particulier aux flots d'Anosov qui admettent une orbite dense : ce sont ceux que l'on appelle *transitifs*. Il y a l'alternative suivante dûe à Plante pour les flots d'Anosov transitifs [Pl1] :

1. soit les deux feuilletages $\mathscr{W}^s$ et $\mathscr{W}^u$ sont *minimaux* (les feuilles stables et instables sont toutes denses dans B), et le flot est alors *topologiquement mélangeant*, c'est-à-dire que pour tout couple d'ouverts non vide U et V, il y a un temps T tel que lorsque $t \geq T$ les deux ouverts $\varphi_t(U)$ et V s'intersectent ;
2. ou les deux fibrés E^s et E^u sont *simultanément intégrables* ($\mathscr{W}^s$ et $\mathscr{W}^u$ sous-feuillètent un même feuilletage) et le flot est obtenu par *suspension* (modulo un changement d'échelle temporelle par un facteur constant) d'un difféomorphisme d'Anosov.

Le premier cas est plus intéressant pour nous, ainsi dans toute la suite, $\varphi_t : B \to B$ sera un flot d'Anosov topologiquement mélangeant : ses feuilletages stable instable sont minimaux.

Exemple. Par ce qui précède, le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent T^1B d'une variété Riemannienne close B qui est courbée négativement est un flot d'Anosov topologiquement mélangeant (les sous-fibrés E^s et E^u engendrent une structure de contact, et ne sont donc pas simultanément intégrables).

2.2 – Partitions de Markov

Rectangles. Nous aurons besoin de partitions de Markov pour un tel flot d'Anosov topologiquement mélangeant φ_t (même si nous notons que la transitivité est suffisante pour l'existence d'une partition de Markov). Nous suivrons les étapes de la construction de Bowen et Ratner qui ont réussi en premier à prouver leur existence dans un contexte général dans les années 1970 (voir [Bo1, Ra]).

Pour un petit ε, les variétés invariantes locales de tailles ε d'un point p, notées $W^\star_\varepsilon(p)$ pour $\star = s, u, cs$ ou cu, sont définies comme la composante connexe de l'intersection $B(p, \varepsilon) \cap W^\star(p)$ qui contient p.

Proposition 1.2.1. *Il existe des nombres positifs $0 < \delta < \gamma < 2\delta$ tels que si p et q sont à distance au plus γ, alors la variété instable locale de p et la variété centre-stable locale de q de taille δ s'intersectent transversalement en un unique point noté $[p, q]$:*

$$W_\delta^{cs}(p) \pitchfork W_\delta^u(q) = \{[p, q]\}.$$

Quand $A^\star \subset W_\gamma^\star(p)$, $[A^u, A^{cs}]$ est définie comme l'image de $A^u \times A^{cs}$ par le crochet $[.,.]$.

Remarque. La structure de produit local entraîne que lorsque φ_t est topologiquement mélangeant, alors une feuille instable (resp. une feuille stable) rencontre toute variété centre-stable (resp. centre-instable) locale de taille arbitrairement petite.

Définition 1.2.2. *Un rectangle R de B est un ensemble $R = [A^u, A^s]$ où $A^\star \subset W_\gamma^\star(p)$, pour un certain point p et $\star = u$ ou s, a un intérieur non vide, et est l'adhérence de son intérieur.*

Remarque. Un rectangle R est *topologiquement transverse* au flot dans le sens qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $R \cap \varphi_{[0,\alpha]}(R) = \emptyset$.

Définition 1.2.3. *Une famille finie de rectangles $\mathscr{R} = (R_i)_{i\in I}$ sera appelée complète de taille α si l'union des R_i intersecte chaque orbite positive, et si pour tout $i \neq j$, $\varphi_{[0,\alpha]}(R_i) \cap R_j = \emptyset$.*

Nous introduisons la notation suivante : si $R = [A^u, A^s]$ est un rectangle avec $A^\star \subset W_\gamma^\star(p)$ ($\star = u$ ou s), et $q_1, q_2 \in R_i$, nous notons $A^u(q_1) = [A^u, q_1]$ et $A^s(q_2) = [q_2, A^s]$. Remarquons alors que nous avons toujours $A^u(q_1) \subset W^u(q_1)$, alors que $A^s(q_2)$ ne sera pas inclus dans $W^s(q_2)$ puisque $\mathscr{W}^s$ et $\mathscr{W}^u$ ne sont pas supposés simultanément intégrables.

Pour un système complet de rectangles $\mathscr{R}$, nous pouvons (par compacité de B) associer à $p \in B$ le plus petit $t > 0$ pour lequel $\varphi_t(p) \in \bigcup R_i$. Nous définissons ainsi le *temps de premier retour* $r(p)$, ainsi que *l'application de premier retour* $T(p)$. Ces fonctions sont continues sur :

$$\mathscr{C} = \{p \in B | T^k(p) \in \bigcup \mathrm{Int} R_i \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}\}, \tag{1.2.3}$$

qui est un ensemble résiduel et donc, est dense par le théorème de Baire.

Associée à un tel système complet de rectangles, il y a toujours une décomposition de B comme union de *cubes* :

$$C_i = \bigcup_{p\in R_i} \varphi_{[0,r(p)]}(p). \tag{1.2.4}$$

De plus, nous pouvons considérer les *cubes ouverts* :

$$C_i^* = \bigcup_{p\in \mathrm{Int} R_i} \varphi_{[0,r(p)]}(p). \tag{1.2.5}$$

Remarquons que si $\mathscr{C}'$ est l'union de toutes les orbites passant par les $C_i \setminus C_i^*$, nous avons $\mathscr{C} = B \setminus \mathscr{C}'$ (ces deux ensembles sont invariants par le flot).

Propriété de Markov. Pour un système complet de rectangles $\mathscr{R}$, et deux indices i et j nous considérons $R_{ij} = \mathrm{Int} R_i \cap T^{-1}(\mathrm{Int} R_j)$.

Définition 1.2.4. *Un système complet de rectangles $\mathscr{R}$ vérifie la propriété de Markov si pour tous i et j tels que $R_{ij} \neq \emptyset$, et $p \in R_{ij}$, nous avons :*

$$A_i^s(p) \subset \mathrm{Adh}\, R_{ij},$$

$$A_j^u(T(p)) \subset \mathrm{Adh}\, T(R_{ij}).$$

Définition 1.2.5. *Une partition de Markov est une famille de cubes $(C_i)_{i\in I}$ associée à un système complet de rectangles $(R_i)_{i\in I}$ vérifiant la propriété de Markov.*

Les ensembles $A_i^u(p)$, pour $p \in C_i^*$, $i \in I$ seront appelés plaques markoviennes instables.

Bowen et Ratner ont prouvé (voir [Bo1, Ra]) l'existence de systèmes complets de rectangles avec la propriété de Markov et de taille arbitrairement petite. Nous aurons besoin de la version suivante de ce théorème d'existence donnée dans [BGV].

Theorème 1.2.6 (Existence de partitions de Markov)**.** *Soit $\mathscr{U} = (U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de B. Alors il existe une partition de Markov adaptée, c'est-à-dire un système complet de rectangles $\mathscr{R} = (R_i)_{i\in I}$ avec la propriété de Markov tel qu'il existe deux fonctions $\alpha, \beta : I \to J$ vérifiant pour tout $i \in I$:*

1. *$C_i \subset U_{\alpha(i)}$;*
2. *pour tout $p \in C_i$, $\varphi_{r(p)}(p) \in U_{\beta(i)}$.*

De plus l'ensemble $\mathscr{C}$ est à la fois un G_δ dense, et a une mesure pleine pour toute mesure de probabilité ergodique pour φ_t, positive sur les ouverts.

Remarque. Si $(C_i)_{i\in I}$ est une partition de Markov, l'intersection de deux cubes est soit vide, soit incluse dans leurs bords. Ainsi, la dernière assertion entraîne-t-elle que cette décomposition est une partition mesurable modulo zéropour toute mesure invariante ergodique positive sur les ouverts.

3 | Feuilletages et holonomie

3.1 – Feuilletages

Définition. Nous dirons qu'une variété M de dimension k possède un *feuilletage C^r*, $r \geq 1$, et de dimension $d \geq 1$, si elle est munie d'un atlas localement fini $\mathscr{A} = (U_i, \phi_i)_{i\in I}$ consistant d'homéomorphismes locaux $\phi_i : U_i \to P_i \times T_i$ où P_i et T_i sont des cubes de dimensions respectives d et $k-d$ de sorte que les changements de cartes suivants soient des difféomorphismes de classe C^r, et de la forme :

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(z,t) = (\zeta_{ij}(z,t), \tau_{ij}(t)), \tag{1.3.6}$$

où $(z,t) \in \phi_i(U_i \cap U_j)$.

Les ensembles $\phi_i^{-1}(P_i \times \{t\})$ sont appelées les *plaques*. Les changements de cartes ayant cette forme très particulière, nous pouvons recoller les plaques les unes avec les autres, obtenant ainsi une partition de M par des sous-variétés immergées : ce sont les *feuilles* de $\mathscr{F}$. Nous noterons souvent $(P_i(x))_{x\in U_i}$, la collection des plaques de incluse dans la carte U_i, $i \in I$, et, sauf mention du contraire, nous identifierons toujours abusivement les transversales T_i avec leurs préimages $\phi_i^{-1}(\{z_i\} \times T_i)$ pour un choix de z_i. Une telle collection consiste de sous-variétés locales plongées transverses aux feuilles et dont l'union rencontre toute feuille : nous l'appellerons un *système complet de transversales.*

Nous serons également intéressés à certains feuilletages continus venant de la dynamique. Mais nous avons besoin de raffiner quelque peu la définition. Les feuilletages C^0 qui nous intéressent seront supposés tangents à un champ de plans continu et intégrable. Notons que plusieurs feuilletages peuvent être tangents à un même champ de plans si celui-ci n'est supposé que continu.

Nous aurons besoin dans la suite de considérer les deux types de feuilletages. Pour alléger la présentation, lorsque nous considèrerons $(M, \mathscr{F})$ une variété close feuilletée, nous entendrons une variété close munie d'un feuilletage C^∞.

Holonomie. Soit M une variété close feuilletée munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ qui peut être lisse, ou seulement tangent à un champ de plans continu. Un atlas feuilleté $\mathscr{A} = (U_i, \phi_i)_{i\in I}$ de M sera appelé un *bon atlas* si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. si deux plaques s'intersectent, leur intersection est connexe ;
2. si deux cartes U_i et U_j s'intersectent, alors $\mathrm{Adh}(U_i \cap U_j)$ est inclus dans une carte feuilletée : une plaque de U_i intersecte au plus une plaque de U_j.

Nous pouvons définir la *transversale complète* $\mathscr{T}$ comme l'union des T_i. Rappelons qu'en général, nous identifions T_i et une transversale locale $\phi_i^{-1}(\{z_i\} \times T_i)$, de sorte que nous pouvons voir les points de $\mathscr{T}$ comme des points de la variété ambiente M. Les applications de transitions τ_{ij} engendrent un *pseudogroupe* $\mathscr{P}$ d'homéomorphismes locaux de $\mathscr{T}$ (de difféomorphismes C^r locaux si le feuilletage est supposé C^r). C'est le *pseudogroupe d'holonomie* de $\mathscr{F}$. Notons que ce pseudogroupe est symétrique puisque nous avons $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ji}$. Rappelons les axiomes requis dans la définition d'un pseudogroupe $\mathscr{P}$ agissant sur $\mathscr{T}$. C'est une famille d'homéomorphismes locaux $\tau : \mathrm{dom}(\tau) \to \mathrm{but}(\tau)$, où $\mathrm{dom}(\tau)$ désigne le *domaine* de τ, et $\mathrm{but}(\tau)$, son *but* : ce sont deux petits ouverts de $\mathscr{T}$. Nous demandons :

1. *la stabilité par composition* : si $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{P}$, et si $\mathrm{dom}(\tau_1 \circ \tau_2) = \mathrm{dom}(\tau_2) \cap \tau_2^{-1}(\mathrm{dom}(\tau_1))$ est non vide, alors $\tau_1 \circ \tau_2 \in \mathscr{P}$;
2. *la stabilité par inversion* : si $\tau \in \mathscr{P}$, alors $\tau^{-1} : \mathrm{dom}(\tau^{-1}) = \mathrm{but}(\tau) \to \mathrm{but}(\tau^{-1}) = \mathrm{dom}(\tau)$ est encore dans $\mathscr{P}$;
3. *la stabilité par restriction* : si $\tau \in \mathscr{P}$, et $U \subset \mathrm{dom}(\tau)$ est un ouvert, alors $\tau_{|U} \in \mathscr{P}$;
4. *la stabilité par union* : si $\tau : \mathrm{dom}(\tau) \to \mathrm{but}(\tau)$ est un homéomorphisme local, et s'il y a un recouvrement par des ouverts $(V_j)_{j\in J}$ de $\mathrm{dom}(\tau)$ tels que pour tout $j \in J$, $\tau_{|V_j} \in \mathscr{P}$, alors $\tau \in \mathscr{P}$.
5. L'application Identité $\mathscr{T} \to \mathscr{T}$ est dans $\mathscr{P}$ (cela revient essentiellement à dire, par ce qui précède, que tout point de $\mathscr{T}$ appartient au domaine d'un élément de $\mathscr{P}$).

Nous pouvons alors définir *la transformation d'holonomie le long d'un chemin.* Si $c : [0,1] \to M$ est un chemin tangent à une feuille de $\mathscr{F}$, et si T_i et T_j sont des petites sous-variétés transverses $\mathscr{F}$ contenant $c(0)$ and $c(1)$ dans leur intérieur, alors il existe des petits voisinages $S_i \subset T_i$ et $S_j \subset T_j$ de $c(0)$ et $c(1)$ respectivement tel que tout point de S_i puisse être envoyé sur S_j en suivant c le long des feuilles voisines. Plus précisément, considérons une chaîne de cartes recouvrant c, par exemple $U_{i_0}, \dots, U_{i_n}$. Alors τ_c est défini comme la composition $\tau_{i_{n-1} i_n} \circ \dots \circ \tau_{i_1 i_0}$, définie sur un petit voisinage ouvert de $c(0)$ dans T_i . Le *germe* de $\tau_c : S_i \to S_j$ ne dépend ni du choix particulier de c ni du choix de la chaîne de cartes feuilletées, mais seulement de la classe d'homotopie de c.

3.2 – Fibrés feuilletés

Définition. Soit B et V deux variétés différentiables connexes. Considérons un fibré localement trivial (nous omettrons cette précision dans la suite pour simplifier la présentation) $\Pi : M \to B$ de base B, et de fibre V. Cela signifie que Π est une submersion dont toutes les fibres $V_p = \Pi^{-1}(p)$ sont difféomorphes à V, et tel qu'il existe un atlas localement fini de B, noté $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$, qui trivialise le fibré. C'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \Pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "\Pi"'] & U_i \times V \arrow[d, "pr_1"] \\ U_i \arrow[r, "Id"'] & U_i \end{tikzcd} ,$$

et que les changements de coordonnées sont de la forme $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(p,x) = (p, \tau_{ij}(p)(x))$, $p \in U_i \cap U_j$, $x \in V$, où

$$\tau_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Diff}(V).$$

L'ensemble $\{\tau_{ij}(p) | i, j \in I,\ p \in U_i \cap U_j\}$ engendre un sous-groupe $G \leq \mathrm{Diff}(V)$ qui est appelé *groupe structural* de la fibration. Si de plus le groupe G est discret, c'est-à-dire si les τ_{ij} sont localement constants, on dit que le fibré est *plat*.

C'est équivalent au fait que le fibré admette une *connexion plate*, c'est-à-dire un champ de plans intégrable et transverse aux fibres. Il existe alors un feuilletage $\mathscr{F}$ dont les feuilles sont des revêtements de la base B, et sont transverses aux fibres. Un tel objet sera appelé un fibré feuilleté, et noté $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$.

Représentation d'holonomie. L'holonomie d'un tel feuilletage est décrite par une représentation du groupe fondamental de B dans le groupe des difféomorphismes de V, $\rho : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(V)$ que nous appelons *représentation d'holonomie*. En effet, si c est un chemin basé en $p \in B$, alors étant donné un point x de la fibre $V_p = \Pi^{-1}(p)$ il existe par le propriété de relèvements, un unique chemin de la feuille L_x qui se projette sur c et qui commence en x. L'application qui associe à tout point x le point d'arrivée de ce chemin relevé est un difféomorphisme de F_p qui ne dépend que de la classe d'homotopie de c. Cela définit de plus un morphisme contravariant $\pi_1(B,p) \to \mathrm{Diff}(V_p)$. Ainsi, son inverse, notée ρ, est la représentation qui décrit l'holonomie du feuilletage.

De plus, deux fibrés feuilletés possédant des représentations d'holonomies conjuguées par un difféomorphisme de V sont équivalents : ils sont conjugués par un difféomorphisme des espaces ambiants qui envoie feuille sur feuille.

Suspension. Toute représentation $\rho : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(V)$ se réalise comme représentation d'holonomie d'un fibré feuilleté par un procédé appelé *suspension*. En effet il existe une action de $\pi_1(B)$ sur le revêtement universel $\widetilde{B}$ de B par applications de revêtement. Il y a donc une action diagonale de $\pi_1(B)$ sur $\widetilde{B} \times V$, où l'on agit sur le premier facteur par transformations de revêtement, et sur le second, par ρ.

Il est alors prouvé dans [CL] que le quotient M par cette action diagonale est naturellement muni d'une structure différentiable, ainsi que d'une structure de fibré feuilleté dont la représentation d'holonomie est donnée par ρ.

Exemple 1. Cet exemple est bien connu des dynamiciens : prenons un automorphisme linéaire d'Anosov $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ sur le tore. Le procédé de suspension exposé ci-dessus fournit donc un feuilletage de dimension 1 d'une variété résoluble de dimension 3, fibrée en tores au dessus du cercles. Le paramétrage des feuilles par longueur d'arcs du cercle, fournit un flot d'Anosov transitif dont l'application de retour fibre à fibre coïncide avec l'automorphisme A.

Exemple 2. Nous décrivons le feuilletage canonique d'une surface hyperbolique, que nous aurons à étudier plus loin. Soit Σ une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. Munir Σ d'une métrique hyperbolique revient, par uniformisation, à prendre une copie Γ de $\pi_1(\Sigma)$ dans le groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$, des isométries directes du disque muni de la métrique de Poincaré, ainsi qu'un revêtement $\Pi : \mathbb{D} \to \Sigma$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\Pi \circ \gamma = \Pi$.

L'action de Γ sur $\mathbb{D}$ s'étend alors en une action sur le cercle à l'infini $S_\infty \simeq \mathbb{RP}^1$. Nous pouvons alors suspendre cette action, obtenant ainsi une variété de dimension 3 qui fibre en cercles au dessus de la surface Σ, feuilletée par des surfaces de Riemann qui la revêtent toutes. Nous pouvons alors voir que cette variété suspension s'identifie au fibré unitaire tangent de Σ, et que le feuilletage ainsi obtenu est équivalent au feuilletage centre-stable (ou centre-instable) du flot géodésique de Σ.

Exemple 3. Une présentation de la surface compacte orientable de genre 2 est donnée par :

$$\langle a,b,c,d \,|\, [a,b][c,d]=1\rangle.$$

Le groupe engendré par a et c est alors un groupe libre à deux générateurs. Nous pouvons alors considérer des représentations de $\pi_1(\Sigma)$ qui transitent à travers ce groupe libre, c'est-à-dire à travers le morphisme :

$$\begin{array}{rccl} \rho: & \pi_1(\Sigma) & \longrightarrow & \langle A,B\rangle \simeq F_2 \\ & a & \longmapsto & A \\ & b & \longmapsto & Id \\ & c & \longmapsto & B \\ & d & \longmapsto & Id \end{array}$$

La différence par rapport à l'exemple précédent est que la représentation est loin d'être injective. Le noyau G de cette représentation est énorme : c'est alors un groupe fuchsien libre infiniment engendré, et possédant une action minimale sur le cercle. Néanmoins, il y a un bon espoir d'étudier du point de vue ergodique ces représentations qui transitent à travers un groupe libre, parce que ce noyau G a un exposant critique <1.

Groupe libre de rotations. Nous pouvons prendre par exemple deux matrices de rotation irrationnelles de la sphère S^2 qui engendrent un groupe libre, $A,B \in SO(3)$. Il y a donc une représentation $\rho:\pi_1(\Sigma)\to\langle A,B\rangle$, que l'on peut suspendre. Nous obtenons donc un feuilletage dont toutes les feuilles sont denses et à croissance exponentielle (elles sont quasi-isométriques au groupe F_2), et dont les applications d'holonomie, sont toutes des isométries, et préservent donc la forme d'aire sur la sphère.

Groupe de Schottky. Nous pouvons également suspendre un groupe discret de transformations de Möbius sur $\mathbb{CP}^1$. Soit quatre disques mutuellement disjoints D_A, D_A^{-1}, D_B, D_B^{-1} dans $\mathbb{CP}^1$, et deux éléments $A,B \in PSL_2(\mathbb{C})$ tels que $A(\mathbb{CP}^1 \setminus D_{A^{-1}}) \subset D_A$, $B(\mathbb{CP}^1 \setminus D_{B^{-1}}) \subset D_B$. Le groupe $\langle A,B\rangle$ est alors appelé *groupe de Schottky* et est un sous-groupe libre et discret de $PSL_2(\mathbb{C})$. L'ensemble limite de ce groupe est alors un ensemble de Cantor sphérique.

En suspendant cette représentation, nous obtenons donc un feuilletage par surfaces hyperboliques dont toutes les feuilles spiralent autour d'un ensemble minimal dont les intersections avec les fibres sont précisément des ensembles de Cantor sphériques. À la différence de l'exemple ci-dessus il n'y a pas de mesure transverse invariante par holonomie : en effet, les seules mesures invariantes par A sont les combinaisons convexes des masses de Dirac situées en les droites propres : il y en a une dans D_A (celle associée à la valeur propre de module >1), et une autre dans $D_{A^{-1}}$ (celle associée à la valeur propre de module <1), et de même pour B. En particulier, il n'existe pas de mesure invariante à la fois par A et B. Cette situation de non existence d'une mesure invariante par holonomie est générique parmi les représentations projectives de groupe de surfaces.

Action jointe hyperbolique-elliptique. Nous pouvons enfin imaginer un exemple qui semble beaucoup plus compliqué d'un point de vue ergodique. Nous pouvons considérer, sur le cercle, l'action jointe d'une transformation projective hyperbolique A, et d'une rotation irrationnelle B qui engendrent un groupe libre. Dans ce cas, l'action de $\langle A,B\rangle$ sur le cercle est minimale. Mais d'autre part, l'action sur le cercle ne préserve aucune mesure, parce que l'unique mesure invariante par B est la mesure de Lebesgue, qui n'est pas invariante par A.

Nous pouvons donc suspendre cette représentation de $\pi_1(\Sigma)$. La différence avec le groupe de Schottky est que le groupe d'holonomie n'est pas discret. Alors qu'il y a une description symbolique tout-à-fait commode pour l'ensemble limite d'un groupe de Schottky, la description symbolique de cette action est beaucoup moins claire. En particulier, nous souhaitons poser la question suivante, à laquelle nous ne sommes pas en mesure de répondre :

Question. Existe-t-il une mesure de probabilités sur $\langle A, B\rangle$, par exemple dont le support engendre tout le groupe, telle que la mesure de Lebesgue, ou une mesure équivalente, soit stationnaire pour la chaîne de Markov correspondante ?

3.3 – Mesures transverses et cocycle de Radon-Nikodym

Mesures transverses invariantes par holonomie. Soit $(M, \mathscr{F})$ une variété close feuilletée. Lorsque l'on a un bon atlas feuilleté pour $\mathscr{F}$, nous avons naturellement un système dynamique : c'est l'action du preudogroupe d'holonomie $\mathscr{P}$ sur une transversale complète $\mathscr{T}$. Nous disons, en suivant [Pl2], qu'une mesure de Borel finie μ sur $\mathscr{T}$ est *invariante* par un élément $\tau \in \mathscr{P}$ si pour tout Borélien $A \subset \mathrm{dom}(\tau)$, nous avons $\mu(\tau A) = \mu(A)$. Une *mesure transverse invariante par holonomie* est une mesure finie sur $\mathscr{T}$ qui est invariante par l'action de tout élément de $\mathscr{P}$. Comme nous allons le voir dans la suite, l'existence d'une telle mesure est très rare.

Dans [Pl2], Plante donne une condition suffisante pour l'existence d'une mesure transverse invariante par holonomie : il suffit que la croissance de l'orbite d'un point par le pseudogroupe, ou c'est équivalent, que la croissance d'une boule dans une feuille, soit sous-exponentielle pour que l'adhérence de cette orbite (de cette feuille) supporte une mesure transverse invariante par holonomie.

Dans [BM], afin de prouver l'unique ergodicité des feuilletages stables et instables des flots d'Anosov topologiquement mélangeants, Bowen et Marcus introduisent une notion équivalente de mesure transverse qui est plus adaptée à la théorie des systèmes dynamiques. Soit $(T_i)_{i\in I}$ un système complet de transversales au feuilletage $\mathscr{F}$, nous rappelons que cela signifie que toute feuille de $\mathscr{F}$ rencontre l'union des T_i. Dans ce contexte, une mesure transverse invariante est donnée par une famille $(\nu_i)_{i\in I}$ de mesures de Borel finies sur les transversales T_i vérifiant :

1. il existe $i \in I$ tel que $\nu_i(T_i) > 0$;
2. pour tout couple $i, j \in I$, s'il existe deux Boréliens $A_i \subset T_i$ et $A_j \subset T_j$, ainsi qu'une transformation d'holonomie $h_{T_i \to T_j}$ définie entre deux ouverts de T_i, et T_j tels que $h_{T_i\to T_j}(A_i) = A_j$, alors $\nu_i(A_i) = \nu_j(A_j)$.

Nous aurons dans la suite à jongler entre ces deux différents points de vue. Avant de passer à l'étude des mesures quasi-invariantes, nous aimerions donner, avec preuve, un lemme dû à Bowen et Marcus, que nous généraliserons au paragraphe suivant, qui nous dit qu'à partir d'une famille de mesures invariantes par holonomie sur un système complet de transversales, il est possible de construire une famille de mesures sur toutes les transversales locales (qu'on supposera ouvertes et relativement compactes), qui soit invariante par holonomie. Il s'agit du lemme 1.4 de [BM].

Lemme 1.3.1. *Soit $(T_i)_{i\in I}$ un système complet de transversales pour le feuilletage $\mathscr{F}$. Alors l'application :*

$$(\nu_T)_{T\ transversale} \longmapsto (\nu_{T_i})_{i\in I}$$

est une bijection entre les familles de mesures sur toutes les transversales invariantes par transformations d'holonomie, et celles qui ne sont définies que sur le système complet $(T_i)_{i\in I}$.

Preuve. Il est suffisant de traiter le cas où les transversales T_i sont associées à un bon atlas fini $\mathscr{A}$ pour $\mathscr{F}$, et où toutes les transversales locales que l'on considère sont incluses dans au moins une carte de cet atlas. Supposons donc que l'on ait une famille de mesures $(\nu_i)_{i\in I}$ sur ces transversales invariantes par les transformations d'holonomies.

Soit alors T une petite transversale incluse dans une des cartes U_i de l'atlas. Il existe un ouvert $T' \subset T_i$, ainsi qu'un homéomorphisme $h_{T_i\to T} : T' \to T$ qui associe à l'intersection d'une plaque $T' \cap P$ l'intersection $T \cap P$. Nous pouvons donc définir la mesure $\nu_T = h_{T_i\to T} * \nu_i$ sur T. Si S est une autre transversale de $\mathscr{F}$ incluse dans U_i telle qu'il existe $S' \subset T_i$ et une application d'holonomie $h_{T_i\to S}$, avec $T' \cap S' \neq \emptyset$, il existe alors une application d'holonomie $h_{T\to S}$ définie sur un petit ouvert de T. Nous avons alors par définition, en restriction au domaine de cette transformation, $h_{S_i\to S} \circ h^{-1}_{T_i\to T} = h_{T\to S}$ et on trouve que pour tout Borélien A inclus dans le domaine de cette transformation, $\nu_S(h_{T\to S}A) = \nu_i(h^{-1}_{T_i\to T}A) = \nu_T(A)$.

Il faut à présent prouver que cette définition est compatible avec les changements de carte. Par ce qui précède, nous aurons construit une famille de mesures sur toute transversale invariante par toute transformation d'holonomie. Supposons donc que la transversale T soit incluse dans l'intersection de deux cartes U_i et U_j. Puisque nous avons choisi un bon atlas, la composition $h^{-1}_{T_j\to T} \circ h_{T_i\to T}$ est la restriction à un petit ouvert de T_i d'une transformation d'holonomie τ_{ij}. Soit A un Borélien appartenant à ce petit ouvert, et $A' = h_{T_i\to T}A$. Puisque par définition des ν_i, $\nu_j(\tau_{ij}A) = \nu_i(A)$, nous trouvons $\nu_i(h^{-1}_{T_i\to T}A') = \nu_j(h^{-1}_{T_j\to T}A')$, et la définition de ν_T que nous avions donnée est cohérente avec les changements de cartes. □

Mesures quasi-invariantes, et cocycle de Radon-Nikodym. Il n'existe pas en général de mesure transverse invariante par holonomie d'un feuilletage $\mathscr{F}$. Nous sommes donc amenés à élargir nos études à ces mesures qui sont quasi-invariantes par le pseudogroupe d'holonomie : voir [MS] pour plus de détails sur la théorie des mesures transverses quasi-invariantes pour des actions de groupoïdes.

Définition 1.3.2. *Soit* $(M,\mathscr{F})$ *une variété feuilletée, munie d'un bon atlas localement fini, ainsi que d'une transversale complète* $\mathscr{T}$. *Alors une mesure de probabilité* ν *sur* $\mathscr{T}$ *est dite quasi-invariante par holonomie si pour tout élément* $\tau \in \mathscr{P}$, *et tout Borélien* $A \subset \mathrm{dom}(\tau)$ *tel que* $\nu(A) = 0$, *on a encore* $\nu(\tau A) = 0$.

Associé à une mesure transverse quasi-invariante, nous pouvons associer un cocycle appelé *cocycle de Radon-Nikodym*, que nous pouvons définir pour un couple $\tau \in \mathscr{P}$, et $x \in \mathrm{but}(\tau)$:

$$k(\tau, x) = \frac{d[\tau * \nu]}{d\nu}(x).$$

Nous allons citer un lemme que nous attribuons à Ghys, que nous utiliserons dans toute la suite, et qui nous permet d'éviter le problème éventuel de l'holonomie dans les feuilles. Ghys avait prouvé ce théorème dans [Gh], dans le cadres des mesures transverses associées aux mesures harmoniques : il lui servait à étendre les densités locales de ces mesures dans une feuille typique. C'est exactement cet usage que nous voulons généraliser dans cette thèse.

Lemme 1.3.3 (Ghys)**.** *Soit* $(M,\mathscr{F})$ *une variété close feuilletée, munie d'un bon atlas localement fini, ainsi que d'une transversale complète* $\mathscr{T}$. *Soit* ν *une mesure sur* $\mathscr{T}$ *quasi-invariante par holonomie.*

Alors il existe un ensemble de Borel $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{T}$ de mesure pleine pour ν, et saturé par l'action du pseudogroupe d'holonomie $\mathscr{P}$, tel que pour tout $x \in \mathscr{X}_0$ et tout $\tau \in \mathscr{P}$ fixant x, nous ayons :

$$\frac{d[\tau * \nu]}{d\nu}(x) = 1.$$

Preuve. Le cocycle de Radon-Nikodym $d[\tau * \nu]/d\nu$, $\tau \in \mathscr{P}$ nous premet de définir pour tout x dans le support de ν un morphisme $\pi_1(L_x, x) \to (0, \infty)$, et nous voulons montrer que ce morphisme est trivial presque partout.

Pour cela, considérons un élément $\tau \in \mathscr{P}$. Regardons l'ensemble Borélien des points $x \in \mathscr{T}$ fixés par τ vérifiant $d[\tau * \nu]/d\nu(x) < 1$. Par définition, cet ensemble est fixé par γ, et sa mesure est contractée par τ : il doit avoir une mesure égale à zéro. En considérant τ^{-1}, nous pouvons prouver de même que l'ensemble des points x fixés par τ vérfiant $d[\tau * \nu]/d\nu(x) > 1$ est de mesure zéro. En particulier, l'ensemble des points x fixés par τ tels que $d[\tau * \nu]/d\nu(x) \neq 1$ est de mesure nulle pour ν.

Le pseudogroupe $\mathscr{P}$ est finiment engendré : il est en particulier dénombrable, et par la σ-additivité de ν, nous voyons que l'ensemble des points fixés par un élément du pseudogroupe $\mathscr{P}$ avec un Jacobien $\neq 1$ est de mesure nulle pour ν : nous avons un $\mathscr{X}_0$ comme dans le lemme : ne reste plus qu'à voir que $\mathscr{X}_0$ est saturé par l'action du pseudogroupe.

Si $x \in \mathscr{X}_0$, alors, le groupe des germes des transformations d'holonomie fixant n'importe quel point de L_x est conjugué à celui des germes fixant x. Ainsi nous voyons que pour tout $y \in L_x$, et $\tau \in \mathscr{P}$ fixant y, nous avons également $d[\tau * \nu]/d\nu(y) = 1$: $\mathscr{X}_0$ est en particulier saturé par $\mathscr{P}$ et nous pouvons conclure la preuve du lemme. □

Une autre façon de comprendre le lemme de Ghys, est la suivante. Pour ν-presque tout point $x \in \mathscr{T}$, et pour tout $y \in \mathscr{P}(x)$, nous avons, si $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{P}$ ont x dans leurs domaines et satisfont à $\tau_1(x) = \tau_2(x)$, alors :

$$\frac{d[\tau_1^{-1} * \nu]}{d\nu}(x) = \frac{d[\tau_2^{-1} * \nu]}{d\nu}(x).$$

En d'autre termes, le cocycle de Radon-Nikodym est réellement un cocycle sur l'orbite de presque tout point par le pseudogroupe, et ne dépend pas réellement du chemin suivi reliant les deux points d'une même orbite.

Le *problème de Radon-Nikodym* consiste, étant donné un cocycle sur une orbite d'un point par le pseudogroupe d'holonomie, à reconnaître s'il s'agit ou non d'un cocycle de Radon-Nikodym : voir [AS, MS, K2, Sc]. Il est au cœur de la théorie des mesures de Gibbs, et des constructions de type Patterson-Sullivan (voir par exemple [Ha2, L1, Pa, PPS, Su1]). Dans cette thèse, une de nos motivations, est de donner quelques cocycles de Radon-Nikodym intéressants, autres que ceux classiquement donnés par les quotients de fonctions harmoniques.

Nous allons donner une autre façon de poser le problème, analogue à la façon dont Bowen et Marcus posent celui de l'existence, et de l'unicité, des mesures invariantes. Soit $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence : "appartenir à la même feuille". Soit $k : \mathscr{R} \to (0, \infty)$ un cocycle mesurable : c'est-à-dire que l'on a la relation $k(x, y)k(y, z) = k(x, z)$ pour tous x, y, z dans la même orbite de $\mathscr{R}$. Soit $(T_i)_{i \in I}$ un système complet de transversales à $\mathscr{F}$. La question est alors celle de l'existence d'une famille de mesures de Borel finies $(\nu_i)_{i \in I}$ sur les transversales telles que pour ν_j-presque tout $x \in T_j$ appartenant au but d'une application d'holonomie $h_{T_i \to T_j}$ entre deux petits ouverts relativement compacts de T_i et T_j, on ait :

$$\frac{d[h_{T_i \to T_j} * \nu_i]}{d\nu_j}(x) = k(x, h^{-1}_{T_i \to T_j}(x)). \tag{1.3.7}$$

Nous pouvons également demander d'avoir une famille de mesures définies sur *toutes* les transversales locales. Nous avons alors le lemme suivant qui est une généralisation du lemme 1.3.1, et dont nous ferons usage dans la suite.

Lemme 1.3.4. *Soit $(T_i)_{i\in I}$ un système complet de transversales pour le feuilletage $\mathscr{F}$. Alors l'application :*

$$(\nu_T)_{T\ transversale} \longmapsto (\nu_{T_i})_{i\in I}$$

est une bijection entre les familles de mesures sur toutes les transversales quasi-invariantes satisfaisant la relation de cocycle (1.3.7), et celles qui ne sont définies que sur le système complet $(T_i)_{i\in I}$.

Nous ne prouvons pas ce lemme, dont la démonstration est une généralisation immédiate de celle du lemme 1.3.1.

4 | Métriques feuilletées et flot géodésique feuilleté

4.1 – Métriques feuilletées

Définition. Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée. Nous supposons que :
- chaque feuille L est munie d'une métrique Riemannienne g_L de classe C^∞ ;
- la métrique g_L varie continûment avec le paramètre transverse dans la topologie C^∞.

Nous dirons que $(M,\mathscr{F})$ est munie d'une *métrique feuilletée* (sous-entendu variant continûment avec le paramètre transverse).

À cause de la compacité de la variété M, nous voyons que lorsque $(M,\mathscr{F})$ est munie d'une telle métrique feuilletée, les feuilles deviennent des variétés Riemanniennes dont la géométrie est uniformément bornée, c'est-à-dire :
- les courbures sectionnelles des feuilles sont bornées par des constantes uniformes ;
- le rayon d'injectivité des feuilles est uniformément minoré.

Remarque. Nous ne demandons pas a priori que la métrique des feuilles provienne d'une métrique Riemannienne lisse sur l'espace ambiant. Ceci serait trop restrictif comme le montre l'exemple suivant. Si les feuilles d'un feuilletage par surfaces de Riemann sont toutes de type hyperbolique, c'est-à-dire si leur caractéristique d'Euler-Poincaré est négative, alors par un théorème de Candel (voir l'article [Ca]), toutes ces feuilles peuvent être uniformisées simultanément : il y a une métrique feuilletée faisant de chacune de ces feuilles une surface hyperbolique, c'est-à-dire de courbure constante égale à -1. En revanche, en général, cette métrique ne provient pas d'une métrique Riemannienne de l'espace ambiant.

Paramétrage des feuilles d'un fibré feuilleté. Lorsque l'on suspend un difféomorphisme d'une variété compacte, nous obtenons un feuilletage de dimension 1 transverse à un fibré au dessus du cercle. Afin d'obtenir un flot il faut paramétrer ce feuilletage, et la façon la plus naturelle de le faire, est d'utiliser la longueur d'arc du cercle.

Supposons à présent que $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ soit un fibré feuilleté, avec représentation d'holonomie ρ. Nous pouvons alors paramétrer les feuilles de $\mathscr{F}$ par une structure Riemannienne de B. Quand g est une métrique Riemannienne sur B, nous pouvons la relever via la fibration. En effet, en restriction aux feuilles, la fibration est un revêtement, par lequel nous pouvons tirer en arrière la métrique.

Nous obtenons ainsi une métrique feuilletée sur M. En restriction aux feuilles, Π devient alors un revêtement Riemannien : c'est localement une isométrie.

Nous pouvons anticiper quelque peu sur le paragraphe suivant. En faisant ceci, la différentielle de Π induit un fibré $D\Pi : T^1\mathscr{F} \to T^1B$, de même fibre V, où $T^1\mathscr{F}$ représente l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à $\mathscr{F}$. Il y a alors un feuilletage $\widehat{\mathscr{F}}$ transverse aux fibres. Il n'y a pas d'holonomie le long du facteur en sphères : c'est évident si le dimension des feuilles est ≥ 3 (alors les sphères tangentes sont simplement connexes), et si les feuilles sont des surfaces, et si nous faisons un tour sur une fibre unitaire tangente, puisque Π est localement une isométrie, cela revient à faire un tour dans les fibres unitaires tangentes relevées, et nous revenons au point de départ. De façon plus précise, $\widehat{\rho}$: $\pi_1(T^1B) \to \mathrm{Diff}(F)$ se factorise en $\rho : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(V)$. Nous verrons une formulation plus rigoureuse dans la proposition 1.4.1.

4.2 – Le flot géodésique feuilleté

Le fibré unitaire tangent. Soit $(M, \mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée variant continûment avec le paramètre transverse. Nous définissons le *fibré unitaire tangent* au feuilletage, que nous désignerons par $T^1\mathscr{F}$, comme l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathscr{F}$ qui sont de norme 1 pour la métrique feuilletée. Cet espace est une variété close, naturellement feuilletée par les fibrés unitaires tangents T^1L des feuilles L de $\mathscr{F}$. Nous désignerons ce feuilletage par $\widehat{\mathscr{F}}$. Une propriété importante de ce feuilletage est qu'il possède exactement la même holonomie que $\mathscr{F}$:

Proposition 1.4.1. *Les pseudogroupes d'holonomie de $\mathscr{F}$ et $\widehat{\mathscr{F}}$ sont les mêmes.*

Preuve. À partir d'un bon atlas feuilleté pour $\mathscr{F}$, il y a une façon naturelle d'en construire un pour $\widehat{\mathscr{F}}$ en le tirant en arrière par le fibré unitaire. En effet, puisque la géométrie des feuilles de $\mathscr{F}$ est uniformément bornée (la variété M étant compacte), il est possible de prendre un nombre fini de cartes feuilletées qui trivialisent ce fibré en sphères. Les images réciproques de ces cartes définissent alors un atlas pour $\widehat{\mathscr{F}}$ dont toutes les cartes sont trivialement sous-feuilletées par des sphères de dimension $\dim \mathscr{F} - 1$: en particulier, l'holonomie de ce sous-feuilletage est triviale. Il vient donc que nous n'avons pas ajouté d'holonomie le long du facteur en sphères : les deux feuilletages ont le même pseudogroupe d'holonomie. □

Corollaire 1.4.2. *L'existence d'une mesure transverse invariante par holonomie pour $\mathscr{F}$ et celle pour $\widehat{\mathscr{F}}$ sont équivalentes.*

Chaque feuille T^1L est munie de la *métrique de Sasaki*, que nous décrivons succintement ci-après. Une courbe lisse sur T^1L consiste en une courbe lisse c tracée sur L, et un champ de vecteurs unitaires lisse Y le long de c. La vitesse initiale de cette courbe donne un vecteur tangent à T^1L en $(c(0), Y(0))$. Un tel vecteur est déterminé par une composante verticale :

$$y_v = \dot{c}(0),$$

ainsi que par une composante horizontale qui est la dérivée covariante le long de c :

$$y_h = \nabla_{\dot{c}} Y(0),$$

calculée avec la *connexion de Levi-Civita*. Le carré de la norme de ce vecteur, est alors défini comme la somme $g_L(y_v, y_v) + g_L(y_h, y_h)$: ainsi est définie la métrique de Sasaki.

La description locale de la connexion de Levi-Civita fait intervenir les *symboles de Christoffel* qui dépendent uniquement du 1-jet de la métrique (voir par exemple [dC]) : ce sont des fonctions qui varient continûment avec la métrique dans la topologie C^∞. Il en est ainsi de même de la métrique de Sasaki, et nous déduisons de ce qui précède que la métrique de Sasaki feuilletée varie continûment avec le paramètre transverse dans la topologie C^∞. Le feuilletage $\widehat{\mathscr{F}}$ de $T^1\mathscr{F}$ est donc muni d'une métrique feuilletée.

Le flot géodésique feuilleté. Nous noterons G_t le flot géodésique feuilleté : c'est un flot C^∞ en restriction à T^1L. C'est l'acteur principal de cette thèse.

Ce champ de vecteurs varie continûment avec le paramètre transverse dans la topologie C^∞. En effet, l'équation géodésique est s'écrit en coordonnées comme un systèmes d'EDO du second ordre :

$$\ddot{x}_k = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j,$$

où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel, qui, comme on l'a vu précédemment, ne dépendent que du 1-jet de la métrique.

5 | Désintégration de mesures

5.1 – Théorie de Rokhlin

Partitions mesurables. La référence de base pour cette théorie est l'article fondateur de Rokhlin [Ro]. Soit $\mathcal{Z}$ un espace métrique compact. Rappelons qu'une partition de $\mathcal{Z}$ par ensembles de Borel $\mathscr{P}_2$ est dite plus fine que $\mathscr{P}_1$, et l'on note $\mathscr{P}_1 \prec \mathscr{P}_2$, si tout atome de $\mathscr{P}_2$ est inclus dans un atome de $\mathscr{P}_1$. Lorsque nous avons deux telles partitions $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, alors nous pouvons les raffiner en posant $\mathscr{P}_1 \vee \mathscr{P}_2 = \{\alpha \cap \beta; \alpha \in \mathscr{P}_1, \beta \in \mathscr{P}_2\}$. Le théorème de Rokhlin que nous allons utiliser intensivement dans la suite s'énonce dans le contexte des partitions mesurables.

Définition 1.5.1. *Soit $\mathcal{Z}$ un espace métrique compact, et μ une mesure de probabilité Borélienne. Nous disons que $\mathscr{P}$ est une* ***partition mesurable*** *de $\mathcal{Z}$ s'il existe des parties mesurables $E_n \subset \mathcal{Z}$ tels que :*

$$\mathscr{P} \overset{o}{=} \bigvee_{n=1}^{\infty} \{E_n, X \setminus E_n\}.$$

De façon équivalente, $\mathscr{P}$ est mesurable s'il existe une suite croissante de partitions finies ou dénombrables $\mathscr{P}_1 \prec \mathscr{P}_2 \prec \ldots \prec \mathscr{P}_n \ldots$ telle que :

$$\mathscr{P} \overset{o}{=} \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}_n.$$

Par exemple, si l'on a une fibration continue $\Pi : \mathcal{Z} \to \mathscr{X}$, au dessus d'un espace $\mathscr{X}$ métrique compact, donc séparable, alors la partition de $\mathcal{Z}$ donnée par les fibres de Π est une partition mesurable. En revanche, la partition en feuilles d'une variété feuilletée n'est en général pas mesurable : il peut y avoir accumulation des feuilles. C'est le cas par exemple du feuilletage du tore $\mathbb{T}^2$ par droites de pente irrationnelle.

Désintégration. Soit $\mathcal{Z}$ un espace métrique compact, μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{Z}$, et $\mathscr{P}$ une partition mesurable. Notons $\Pi : \mathcal{Z} \to \mathscr{P}$ la projection naturelle qui associe à un point x l'atome auquel il appartient : via cette projection, il est possible de transporter la structure Borélienne de $\mathcal{Z}$ à $\mathscr{P}$. Nous pouvons ainsi définir une mesure de probabilité par projection : $\nu = \Pi * \mu$. Une *désintégration* de μ *par rapport à* ν est une famille de mesures de Borel sur les atomes de la partition $(\mu_P)_{P \in P_p}$, appelées *mesures conditionnelles*, telles que :

1. $\mu_P(P) = 1$ pour ν-presque tout $P \in \mathscr{P}$,
2. pour tout Borélien $A \subset \mathscr{Z}$, nous avons :

$$\mu(A) = \int_{\mathscr{P}} \mu_P(P \cap A) d\nu(P).$$

Theorème 1.5.2 (Rokhlin)**.** *Soit $\mathscr{Z}$ un espace métrique compact, μ une mesure borélienne finie, et $\mathscr{P}$ une partition mesurable. Alors μ possède une désintégration dans les atomes de $\mathscr{P}$ par rapport à sa projection. De plus cette désintégration est unique à un ensemble de mesure nulle près dans $\mathscr{P}$.*

Remarque. Nous pouvons désintégrer μ par rapport à *n'importe quelle* mesure ν' *équivalente à la projection.* Dans ce cas, les nouvelles mesures conditionnelles μ'_P *ne sont plus des mesures de probabilité* : elles sont obtenues par multiplication des anciennes mesures μ_P par la dérivée de Radon-Nikodym $d\nu/d\nu'(P)$.

Cas des fibrations continues. Nous donnons une description des mesures conditionnelles dans le cas où l'espace fibre au dessus d'un espace métrique compact. Considérons un fibré continu, et localement trivial, $\Pi : \mathscr{Z} \to \mathscr{X}$ de fibre $\mathscr{Y}$ où $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$ sont trois espaces métriques compacts. Soit μ une mesure de Borel finie sur $\mathscr{Z}$, et $\nu = \Pi * \mu$. Par compacité de $\mathscr{X}$, il existe un nombre positif ε_0 tel que toute boule de rayon $\varepsilon < \varepsilon_0$ trivialise le fibré. Nous pouvons alors faire l'identification $\Pi^{-1}(B_{\mathscr{X}}(x,\varepsilon)) \simeq B_{\mathscr{X}}(x,\varepsilon) \times \mathscr{Y}$. Alors avec cette notation abusive, nous pouvons énoncer le lemme suivant.

Lemme 1.5.3. *Pour ν-presque tout $x \in \mathscr{X}$, et tout ensemble de Borel $A \subset \mathscr{Y}_x$, nous avons :*

$$\mu_x(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(B_{\mathscr{X}}(x,\varepsilon) \times A)}{\mu(B_{\mathscr{X}}(x,\varepsilon) \times \mathscr{Y})}$$

Mesures supportées par des graphes. Le lemme suivant est assez facile, mais il nous sera très utile dans la suite, particulièrement dans la preuve du lemme 7.1.12 . Il traite du cas d'une partition triviale $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ et d'une mesure de Borel finie μ supportée par le graphe d'une fonction mesurable $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Dans ce cas, la mesure conditionnelle de la mesure μ dans une tranche typique $\{x\} \times \mathscr{Y}$ est juste la masse de Dirac en $f(x)$. La question est : que dire de la mesure conditionnelle dans les tranches horizontales $\mathscr{X} \times \{y\}$?

Lemme 1.5.4. *Soit $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ deux espaces métriques, $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, et ν une mesure de Borel finie sur $\mathscr{X}$. Chaque fibre horizontale $\mathscr{X} \times \{y\}$, $y \in \mathscr{Y}$ est naturellement munie d'une copie de ν. Soit $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ une fonction mesurable, $\widehat{\mu} = f * \nu$ son image sur $\mathscr{Y}$, et $\mu = (Id, f) * \nu$, l'image sur le graphe de f.*

Soit $(\mu_y)_{y \in \mathscr{Y}}$ la désintégration de μ dans les fibres $\mathscr{X} \times \{y\}$ par rapport à $\widehat{\mu}$. Alors si y n'est pas un atome de $\widehat{\mu}$, les mesures μ_y et ν sont mutuellement singulières.

Preuve. Nous supposons que ν est une mesure de probabilité. Soit $A \subset \mathscr{X}$ l'ensemble $\{x | f(x) \neq y\}$. Puisque f est mesurable, c'est un ensemble de Borel, et dire que y n'est pas un atome de $\widehat{\mu}$ revient exactement au même que dire que $\nu(A) = 1$. Notons $\mathrm{dist}_{\mathscr{Y}}$ la distance sur $\mathscr{Y}$, et pour chaque entier $n > 0$, notons A_n l'ensemble des $x \in \mathscr{X}$ qui vérifient $\mathrm{dist}_{\mathscr{Y}}(f(x), y) \geq 1/n$. Ces ensembles forment une suite croissante de Boréliens dont l'union est exactement donnée par A, de sorte que $\lim_{n \to \infty} \nu(A_n) = \nu(A) = 1$.

À présent, lorsque $\varepsilon \leq 1/n$, nous avons $\mu(A_n \times B_{\mathscr{Y}}(y,\varepsilon)) = \nu(\{x \in A_n ; \mathrm{dist}(f(x), y) \leq \varepsilon\}) = 0$. Ainsi, par le lemme ci-dessus, $\mu_y(A_n) = 0$. En faisant croître n indéfiniment, nous obtenons $\mu_y(A) = 0$.

Récapitulons : nous avons $\nu(A) = 1$ et $\mu_y(A) = 0$, les deux mesures sont donc mutuellement singulières, et nous pouvons conclure la preuve du lemme. $\square$

5.2 – Désintégration dans les feuilles d'un feuilletage, cocycles et mesures transverses

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à certaines mesures ayant des mesures conditionnelles dans les plaques équivalentes à certaines mesures prescrites dans les feuilles d'un feuilletage. Nous renvoyons le lecteur à l'excellent [KL], et notamment le chapitre 2 où Kaimanovich et Lyubich parlent de mesures tangentielles et transverses aux feuilletages, discutent des cocycles de Rdon-Nikodym correspondant, et montrent comment recoller de telles objets pour donner des mesures définies sur la variété ambiente. Ils traitent du *problème de Radon-Nikodym* : il s'agit de savoir si un cocycle donné sur les feuilles d'un feuilletage est ou non le cocycle de Radon-Nikodym d'une certaine famille de mesures quasi-invariantes par holonomie.

Ce problème est aussi traité par les dynamiciens, mais prend une autre forme : il s'agit de la structure de produit local des états de Gibbs, et de la prescription de mesures transverses aux feuilletages invariants par une dynamique hyperbolique. Nous aurons besoin du cadre abstrait suivant dans toute la suite.

Désintégration absolument continue/singulière dans les feuilles d'un feuilletage. Le titre est provocateur. Nous avons mentionné plus haut que la partition donnée par les feuilles d'une variété feuilletée n'est en général pas mesurable. En revanche, un feuilletage étant localement trivial, il est toujours possible de désintégrer une mesure dans les plaques d'une carte feuilletée, et nous pouvons comparer ces mesures (qui a priori dependent du choix de la carte) avec une famille de mesures données sur la feuille.

Définition 1.5.5. *Soit $(\mathscr{F},\lambda_x^{\mathscr{F}})$ un feuilletage d'une variété close M, muni d'une famille de mesures de Borel dans les feuilles, qui varient mesurablement avec le paramètre transverse, et telle que pour x,y vivant sur la même feuille, $\lambda_x^{\mathscr{F}}=\lambda_y^{\mathscr{F}}$.*

Nous disons qu'une mesure de Borel finie m sur M a une désintégration absolument continue (resp. singulière) par rapport à $(\mathscr{F},\lambda_x^{\mathscr{F}})$ si les mesures conditionnelles dans presque toute plaque P_x sont équivalentes (resp. singulières) par rapport à $\lambda_x^{\mathscr{F}}$.

Dans le cas spécial où $\lambda_x^{\mathscr{F}}$ est la mesure de Lebesgue, nous disons que la désintégration de m dans les feuilles de $\mathscr{F}$ est équivalente à la mesure de Lebesgue.

Structure locale et mesures transverses. Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété feuilletée, et $(\lambda_x^{\mathscr{F}})_{x\in M}$ une famille de mesures vérifiant les conditions requises par la définition 1.5.5. Nous demandons de plus, que pour tout x, λ_x^F charge tout ouvert de L_x.

Soit alors m une mesure de probabilité dont la désintégration est absolument continue par rapport à $(\mathscr{F},\lambda_x^{\mathscr{F}})$. Considérons un bon atlas feuilleté $\mathscr{A}=(U_i,\phi_i)_{i\in I}$ dont les cartes sont de la forme $U_i=\bigcup_{x\in T_i}P_i(x)$ telle que $m(U_i)>0$. Nous pouvons alors désintégrer m dans les plaques de U_i :

$$m_{|U_i}=\left(\psi_{i,x}\lambda_x^{\mathscr{F}}\right)\nu_i(x).$$

Nous avons alors une famille de mesures transverses $(\nu_i)_{i\in I}$ qui est quasi-invariante par le pseudo-groupe d'holonomie : en effet, si $m(U_i\cap U_j)>0$, nous pouvons désintégrer m sur $U_i\cap U_j$ par rapport à ν_j ou ν_i, puisque la famille $\lambda_x^{\mathscr{F}}$ est définie sur toute la feuille, et puisqu'elle charge tout ouvert (en particulier l'intersection non vide de tout couple de plaques), nous trouvons ainsi, pour ν_j-presque tout $x\in T_j$:

$$\frac{d[\tau_{ij}*\nu_i]}{d\nu_j}(x)=\frac{\psi_{j,x}}{\psi_{i,\tau_{ij}^{-1}(x)}}. \tag{1.5.8}$$

Ainsi, les densités ne sont bien défines qu'à multiplication par une constante positive près, et la constante mise en jeu est donnée par le cocycle de Radon-Nikodym de la famille $(\nu_i)_{i\in I}$.

Extensions des densités. Nous allons utiliser le lemme de Ghys 1.3.3, pour montrer que, lorsque les mesures $\lambda_x^{\mathscr{F}}$ chargent tout ouvert des feuilles L_x, nous pouvons alors toujours étendre les densités locales.

Proposition 1.5.6. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée, ainsi qu'une famille de mesures de Borel $(\lambda_x^{\mathscr{F}})_{x\in M}$ qui chargent tous les ouverts des feuilles. Soit m une mesure ayant une désintégration absolument continue par rapport à $(\mathscr{F},\lambda_x^{\mathscr{F}})$. Soit $\mathscr{A}=(U_i,\phi_i)_{i\in I}$ un bon atlas feuilleté. Alors il existe un ensemble Borélien $\mathscr{X}_0$ de mesure totale tel que pour tout $y\in\mathscr{X}_0$, appartenant à un certain $P_{i_0}(x)$ pour $x\in T_{i_0}$, la formule suivante définisse une extension mesurable de $\psi_{i_0,x}$, pour presque tout $z\in L_x$, si $z\in U_i$:*

$$\Psi_x(z)=\frac{d[\tau_c^{-1}*\nu_i]}{d\nu_{i_0}}(x)\,\psi_{i_0,\tau_c(x)}(z),$$

où τ_c est une transformation d'holonomie le long de n'importe quel chemin liant x à z.

Preuve. Nous avons mentionné qu'à une telle mesure m est associée une famille de mesures transverse quasi-invariante par holonomie, qui vérifient la relation de cocycle (1.5.8). De plus, par le lemme de Ghys 1.3.3, il existe un ensemble saturé et de mesure pleine de points $x\in\mathscr{T}$, telle que pour tout couple de chemins c_1, c_2 commençant en x et avec le même point d'arrivée,

$$\frac{d[\tau_{c_1}^{-1}*\nu]}{d\nu}(x)=\frac{d[\tau_{c_2}^{-1}*\nu]}{d\nu}(x).$$

Par une récurrence immédiate, grâce à la formule (1.5.8), la formule donnée dans le lemme est une extension mesurable de $\psi_{i_0,x}$. □

Cela prouve en particulier que le support d'une telle mesure est saturé.

6 | Mesures harmoniques

6.1 – Mouvement Brownien

Semi-groupe de diffusion. Soit (L,g) une variété Riemannienne complète, à géométrie bornée et de classe C^∞. Nous rappelons que l'opérateur de Laplace-Beltrami de L est défini par $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$. Lorsqu'il y a ambiguïté, nous notons cet opérateur Δ_L. Sous ces conditions, l'*équation de la chaleur* :

$$\Delta u(x,t)=\partial_t u(x,t), \tag{1.6.9}$$

pour une fonction u sur $L\times(0,\infty)$, C^2 en x, et C^1 en t, a une solution fondamentale $p(x,y;t)$, que l'on appelle le *noyau de la chaleur*. Cela signifie que lorsque y est fixé dans L, $p(.,y;.)$ est solution de l'équation (1.6.9), et que l'unique solution de l'équation de la chaleur (1.6.9) avec condition au bord $\lim_{t\to0}u(x,0)=f(x)$, f étant une fonction continue bornée sur L, est donnée par :

$$u(x,t)=\int_L f(y)p(x,y;t)\,d\mathrm{Leb}(y).$$

En particulier, nous avons :

$$\int_L p(x,y;t)d\mathrm{Leb}(y)=1.$$

Nous renvoyons le lecteur à la référence [Ch] pour plus d'informations sur la théorie des noyaux de la chaleur.

Nous pouvons alors définir le semi-groupe de diffusion, dont le générateur infinitésimal est le Laplacien Δ, sur l'ensemble des fonctions continues bornées de L par la formule :

$$D_t f(x) = \int_L f(y) p(x,y;t)\, d\mathrm{Leb}(y).$$

Lorsqu'il y a une ambiguïté, nous noterons D_t^L le noyau correspondant à L.

Mesures de Wiener et balayage. Si $x \in L$, nous notons Ω_x l'ensemble des chemins continus $\omega : [0,\infty) \to M$ qui commencent en x. Il existe alors une famille notée $(W_x)_{x\in M}$ de mesures appelées *mesures de Wiener* définies sur les Ω_x telles que si S_τ représente le décalage $S_\tau\omega(t) = \omega(t+\tau)$, on ait :

$$S_\tau * W_x = \int_M p(x,y;\tau)\, W_y\, d\mathrm{Leb}(y).$$

Un chemin commençant en x typique pour la mesure de Wiener W_x est appelé un *chemin Brownien.* Nous aurons besoin de la formulation suivante de la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques, qui correspond à la propriété de Markov du mouvement Brownien : nous généraliserons cette propriété aux mesures conditionnelles des mesures harmoniques.

Soit $x \in L$ et E une partie Borélienne récurrente, c'est-à-dire que W_x-presque tout chemin rencontre E. Le *balayage* de la masse de Dirac δ_x sur E, noté β_x^E est défini par la distribution de rencontre avec E des chemins Browniens commençant en x. Une façon rigoureuse de définir ce balayage est de considérer un temps d'arrêt sur Ω_x :

$$T_E(\omega) = \mathrm{Inf}\{t \geq 0; \omega(t) \in E\},$$

puis l'application :

$$S_E(\omega) = \omega(T_E(\omega)),$$

puis enfin de considérer :

$$\beta_x^E = S_E * W_x.$$

Theorème 1.6.1 (Propriété de la moyenne)**.** *Soit $h : L \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique, c'est-à-dire telle que $\Delta h = 0$, et E une partie récurrente pour x. Alors :*

$$h(x) = \int_E h\, d\beta_x^E.$$

6.2 – Mouvement Brownien tangent à un feuilletage et mesures harmoniques

Laplacien, diffusion et mesure de Wiener feuilletés. Lorsque $(M,\mathscr{F})$ est un feuilletage compact muni d'une métrique feuilletée, toutes les feuilles L sont complètes et à géométries uniformément bornés, de sorte qu'on puisse considérer :

- l'ensemble $C^{0,2}(\mathscr{F})$ des fonctions continues sur $\mathscr{F}$ et C^2 en restriction aux feuilles ;
- le laplacien feuilleté $\Delta^{\mathscr{F}}$ défini pour toute fonction $h \in C^{0,2}(\mathscr{F})$ par la formule suivante, pour $x \in M$:

$$\Delta^{\mathscr{F}} h(x) = \Delta_{L_x} h_{|L_x}(x);$$

- l'opérateur de diffusion feuilleté, défini pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$ continue par la formule suivante, pour $x \in M$, $t \geq 0$:
$$D_t^{\mathscr{F}} f(x) = D_t^{L_x} f(x);$$
- l'espace $\Omega^{\mathscr{F}}$ des chemins continus $\omega : [0,\infty) \to M$ dont l'image est contenue dans une feuille de $\mathscr{F}$, muni des applications de décalage $S_\tau(\omega) = \omega(. + \tau)$;
- la famille des mesures de Wiener $(W_x^{L_x})_{x\in M}$, définies sur les $\Omega_x^{\mathscr{F}}$ (l'ensemble des chemins dont l'image est incluse dans L_x).

Nous avons une application "origine" qui envoie $\Omega^{\mathscr{F}}$ sur M : les fibres de cette applications sont précisément les $\Omega_x^{\mathscr{F}}$. Ainsi, il est possible d'associer à toute mesure de probabilité m sur M une mesure de probabilité sur $\Omega^{\mathscr{F}}$ obtenue par intégration contre m des mesures de Wiener $W_x^{L_x}$, et que nous notons $\overline{m}$. Notons que par définition, $\overline{m}$ se projette sur la mesure m par l'application "origine".

Mesures harmoniques. Nous renvoyons à [Gar] pour les preuves des théorèmes suivants.

Theorème 1.6.2. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée. Soit m une mesure de probabilité. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *m s'annule sur les Laplaciens : pour tout $h \in C^{0,2}(\mathscr{F})$:*
$$\int_M \Delta^{\mathscr{F}} h\, dm = 0;$$
- *m est invariante par diffusion de la chaleur feuilletée : pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$ continue, et tout $t \geq 0$,*
$$\int_M D_t^{\mathscr{F}} f\, dm = \int_M f\, dm;$$
- *le relevé $\overline{m}$ à $\Omega^{\mathscr{F}}$ est invariante par toutes les applications de décalage S_τ.*

Définition 1.6.3. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée. Une mesure de probabilité satisfaisant à l'une des conditions équivalentes énoncées dans le théorème précédent est appelée harmonique.*

Le principal intérêt des mesures harmoniques par rapport aux mesures invariantes, est qu'elles existent toujours, quel que soit le feuilletage, pourvu que la variété ambiente soit compacte, et que nous ayons une métrique suffisamment lisse dans les feuilles et qui varie continûment avec le paramètre transverse. Ce théorème est également dû à Garnett [Gar].

Theorème 1.6.4. *Sur toute variété close feuilletée $(M,\mathscr{F})$ munie d'une métrique feuilletée, il existe une mesure harmonique.*

6.3 – Caractérisation locale et décomposition ergodique

Désintégration des mesures harmoniques. Un théorème bien connu d'analyse, le théorème de régularité elliptique, entraîne qu'une distribution sur un ouvert d'une des feuilles qui est harmonique, c'est-à-dire qui s'annule sur tout Laplacien, est en fait lisse et harmonique : c'est-à-dire qu'elle a une densité lisse et harmonique par rapport à la mesure de Lebesgue. Garnett a été capable d'en déduire dans [Gar] la caractérisation suivante.

Theorème 1.6.5. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée. Une mesure de probabilité est harmonique si et seulement si elle a une désintégration équivalente à Lebesgue dans les feuilles de $\mathscr{F}$, et si les densités locales sont harmoniques.*

En d'autres termes, si $U_i = \bigcup_{x\in T_i} P_i(x)$ est une carte feuilletée pour $\mathscr{F}$, nous avons la désintégration suivante :

$$m_{|U_i} = \big(h_i(z,x)\mathrm{Leb}_{L_x}(z)\big)\ \nu_i(x).$$

Nous avons vu dans la section 5.2, qu'il y a alors une famille $(\nu_i)_{i\in I}$ de mesures transverses au feuilletage, quasi-invariantes par holonomie, qui vérifient les relations de cocycles suivantes :

$$\frac{d[\tau_{ij}*\nu_i]}{d\nu_j}(x) = \frac{h_j(.,x)}{h_i(z,\tau_{ij}^{-1}(x))},$$

lorsque $m(U_i\cap U_j)>0$, $x\in T_j\cap\tau_{ij}(T_i)$, et ce quel que soit $z\in P_i(\tau_{ij}^{-1}(x))\cap P_j(x)$. Par la proposition 1.5.6, il est alors possible d'étendre harmoniquement la densité locale de presque toute plaque à toute la feuille, sans obstruction de l'holonomie de la feuille en question.

Lemme 1.6.6. *Soit m une mesure harmonique our $\mathscr{F}$. Alors il existe un ensemble de Borel de mesure pleine et saturé $\mathscr{X}_0\subset M$ tel que pour tout $y\in\mathscr{X}_0$, si $y\in P_{i_0}(x)\subset U_{i_0}$, pour un certain $i_0\in I$, et $x\in T_{i_0}$, alors la formule suivante définit une fonction harmonique de $z\in L_y$ qui étend $h_{i_0}(.,x)$:*

$$H_x(z) = \frac{d[\tau_c^{-1}*\nu_i]}{d\nu_{i_0}}(x)h_i(z,\tau_c(x)), \tag{1.6.10}$$

où $z\in U_i$, et c est n'importe quel chemin reliant y à z.

Mesures harmoniques ergodiques. Garnett prouve aussi dans [Gar] quelques théorèmes de base de la théorie ergodique.

Theorème 1.6.7 (Théorème ergodique feuilleté)**.** *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée, et m une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$. Alors pour toute fonction intégrable $f: M\to\mathbb{R}$, la suite des moyennes temporelles*

$$\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} D_t f(x)$$

converge pour m-presque tout $x\in M$ vers $f\tilde{(}x)$ ou $\tilde{f}$ est une fonction m-intégrable, constante le long des feuilles et satisfaisant à :

$$\int_M f\,dm = \int_M \tilde{f}\,dm.$$

Nous pouvons alors définir la notion de mesure ergodique pour un feuilletage.

Définition 1.6.8. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée. Une mesure harmonique est dite ergodique si tout Borélien saturé est de mesure nulle ou de mesure pleine.*

Soit $x\in M$, on peut diffuser la masse de Dirac δ_x : on considère la moyenne temporelle

$$\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1} D_t\delta_x.$$

Il est alors possible, en utilisant le théorème ergodique feuilleté, de prouver que pour presque tout point $x\in M$, ces moyennes convergent dans la topologie faible-$*$ vers une mesure qu'on note $\tilde{\delta_x}$ et qui est ergodique. On peut alors donner un analogue du théorème de décomposition ergodique des mesures invariantes par un flot ou un difféomorphisme :

Theorème 1.6.9 (Décomposition ergodique)**.** *Soit m une probabilité harmonique sur un espace feuilleté $(M, \mathscr{L})$ et f une fonction intégrable bornée sur M. Alors :*

$$\int_M f\,dm = \int_{x\in R}\left(\int_M f\,d\tilde{\delta_x}\right)dm(x)$$

où R est un ensemble saturé tel que :

1. *$\forall x \in R$, $\tilde{\delta_x}$ existe et x est contenu dans son support.*
2. *si x et y sont dans la même feuille, alors $\tilde{\delta_x} = \tilde{\delta_y}$*
3. *R est de probabilité totale : il est de mesure pleine pour toute mesure harmonique.*

Chapitre II

États de Gibbs pour les flots d'Anosov

1 | États de Gibbs pour les flots d'Anosov

Dans tout ce qui suit, B est une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2 $\varphi_t : B \to B$. Une fonction Hölder sur B est classiquement appelée potentiel dans la théorie des états d'équilibre.

1.1 – Familles de mesures sur les variétés invariantes

Cocycles sur les feuilletages stable et instable. Associés à chaque potentiel Hölder $F : B \to \mathbb{R}$, il y a deux cocycles k_F^s et k_F^u définis respectivement sur les variétés stables et instables, dont l'existence est assurée par la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Soit B une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2 $\varphi_t : B \to B$. Soit $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Alors, les cocycles définis par les propositions suivantes :*

$$k_F^s(p,q) = \exp\left[\int_0^{\infty} (F\circ\varphi_t(q) - F\circ\varphi_t(p))\,dt\right] \text{ pour } p,q \text{ dans la même variété stable,} \tag{2.1.1}$$

et

$$k_F^u(p,q) = \exp\left[\int_0^{\infty} (F\circ\varphi_{-t}(q) - F\circ\varphi_{-t}(p))\,dt\right] \text{ pour } p,q \text{ dans la même variété instable,} \tag{2.1.2}$$

existent, c'est-à-dire que les intégrales convergent.

La preuve de ce théorème est une conséquence immédiate de la Hölder continuité de F : elle découle du lemme de distorsion classique que nous donnerons plus loin (voir le lemme de distorsion 6.1.5).

Familles de mesures. Le théorème suivant associe à chaque potentiel Hölder des familles de mesures de Borel sur less variétés invariantes vérifiant des relations de cocycle remarquables. La formulation que nous donnons ci-dessous est celle donnée par le lemme 2.1 de [BL].

Theorème 2.1.2. *Soit B une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2, $\varphi_t : B \to B$. Soit $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Alors :*

1. *il existe deux familles $(\lambda_{F,p}^{cu})_{p\in B}$ et $(\lambda_{F,p}^{cs})_{p\in B}$ de mesures Boréliennes définies respectivement sur les feuilles de $\mathcal{W}^{cu}$ et $\mathcal{W}^{cs}$ qui vérifient $\lambda_{F,p}^{\star} = \lambda_{F,q}^{\star}$ quand $q \in W^{\star}(p)$ ($\star = cs$ ou cu), ainsi que les relations de cocycle suivantes :*

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}_{p\to p'}^s * \lambda_{F,p}^{cu}\right]}{d\lambda_{F,p'}^{cu}}(q) = k_F^s(q, \mathrm{hol}_{p'\to p}^s(q)), \tag{2.1.3}$$

pour p, p' dans la même variété stable, et q appartenant au domaine d'une application d'holonomie $\mathrm{hol}_{p'\to p}^s$, et :

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}_{p\to p'}^u * \lambda_{F,p}^{cs}\right]}{d\lambda_{F,p'}^{cs}}(q) = k_F^u(q, \mathrm{hol}_{p'\to p}^u(q)) \tag{2.1.4}$$

pour p, p' dans la même variété instable, et q appartenant au domaine d'une application d'holonomie $\mathrm{hol}_{p'\to p}^u$.

De plus, ces mesures sont invariantes à une constante multiplicative près ;

2. *il existe un nombre $P(F)$, ainsi que deux familles de mesures $(\lambda^u_{F,p})_{p\in B}$ et $(\lambda^s_{F,p})_{p\in B}$ respectivement définies sur les feuilles de $\mathscr{W}^u$ et $\mathscr{W}^s$ qui vérifient $\lambda^\star_{F,p} = \lambda^\star_{F,q}$ quand $q \in W^\star(p)$ ($\star = u$ ou s), et qui sont quasi-invariante par le flot φ_t avec les relations de cocycles suivantes, pour tout $p \in B$:*

$$\frac{d\left[\varphi_T * \lambda^u_{F,\varphi_{-T}(p)}\right]}{d\lambda^u_{F,p}}(p) = \exp\left[\int_0^T (F\circ\varphi_{-t}(p) - P(F))\,dt\right], \tag{2.1.5}$$

$$\frac{d\left[\varphi_T * \lambda^s_{F,\varphi_{-T}(p)}\right]}{d\lambda^s_{F,p}}(p) = \exp\left[-\int_0^T (F\circ\varphi_{-t}(p) - P(F))\,dt\right]. \tag{2.1.6}$$

De plus, ces familles sont uniques à une constante multiplicative, et ces relations déterminent uniquement le nombre $P(F)$;

3. *par intégration des $\lambda^u_{F,\varphi_t(p)}$ (resp. $\lambda^s_{F,\varphi_t(p)}$) contre l'élément dt du flot, on obtient une famille de mesures $\lambda^{cu}_{F,p}$ (resp. $\lambda^{cs}_{F,p}$) sur $W^{cu}(p)$ (resp. $W^{cs}(p)$) qui vérifient les relations de cocycles (2.1.3) (resp. les relations (2.1.4)). En particulier, les familles de mesures $\lambda^{c\star}_{F,p}$ sont quasi-invariantes par l'action du flot, avec les mêmes relations de cocycles (2.1.5) et (2.1.6).*

Remarque 1. Pour $F = 0$, les relations (2.1.3) et (2.1.4) signifient que les familles de mesures $(\lambda^{cs}_{0,p})_{p\in B}$ et $(\lambda^{cu}_{0,p})_{p\in B}$ sont respectivement invariantes par les holonomies de $\mathscr{W}^u$ et $\mathscr{W}^s$. Dans ce cas, l'unicité des mesures est donnée par un théorème de Bowen et Marcus [BM]. Dans [M], Margulis donne une belle construction de ces mesures.

Remarque 2. Nous reviendrons plus tard, en appendice, sur la construction de ces mesures. Nous allons reprendre la construction de Margulis adaptée à un potentiel non constant, et montrer l'existence de ces mesures. Nous ne traitons pas l'unicité qui a été prouvée par Babillot et Ledrappier dans leur article [BL], par des méthodes de dynamique symbolique. Nous proposons cette description avec l'espoir de généraliser la construction de telles familles de mesures dans des contextes où une bonne description symbolique de la dynamique n'est pas disponible, par exemple dans le contexte de l'hyperbolicité feuilletée.

Pression d'un potentiel. Le nombre $P(F)$ apparaissant dans le théorème précédent jouera un rôle particulier dans la suite. La définition classique se fait à l'aide de boules dynamiques. Lorsque $T > 0$, nous pouvons définir une distance d_T par la formule :

$$d_T(p,q) = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} \operatorname{dist}(\varphi_t(p), \varphi_t(q)).$$

Pour $\varepsilon > 0$, nous disons que deux points $p, q \in B$ sont (T,ε)-séparés si $d_T(p,q) \geq \varepsilon$. La définition suivante est tirée de [BR].

Définition 2.1.3. *Nous pouvons alors définir la pression du potentiel par la formule suivante :*

$$P(F) = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\log \operatorname{Sup}\left\{\sum_{p\in E}\exp\left[\int_0^T F\circ\varphi_t(p)\,dt\right]; E\ (T,\varepsilon)\text{-séparé}\right\}.$$

Theorème 2.1.4. *Le nombre $P(F)$ apparaissant dans les relations (2.1.5) et (2.1.6) est exactement la pression du potentiel F pour le flot φ_t.*

Nous donnons la caractérisation caractérisation variationnelle suivante de la pression : c'est le principe variationnel de Walters.

Theorème 2.1.5. *Soit B une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2 $\varphi_t : B \to B$, et $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. La pression de F est caractérisée par le principe variationnel de Walters :*

$$P(F) = \mathrm{Sup}\left(h_\mu(\varphi_t) + \int F d\mu\right),$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les mesures invariantes μ, et $h_\mu(\varphi_t)$ désigne l'entropie métrique du flot.

États de Gibbs. Nous pouvons alors définir la notion d'état de Gibbs.

Définition 2.1.6. *Soit B une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2 $\varphi_t : B \to B$, et $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Un état d'équilibre, ou état de Gibbs, pour φ_t associé au potentiel F est une solution du principe variationnel de Walters.*

Nous pouvons à présent formuler précisément ce fait : les états de Gibbs ont la *structure de produit local*. La preuve se trouve également dans l'article de Babillot-Ledrappier, [BL], nous donnerons une explication dans la suite.

Theorème 2.1.7. *Soit B une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2 $\varphi_t : B \to B$, et $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Alors nous avons les propriétés suivantes.*

1. *Il existe un unique étét de Gibbs φ_t associé au potentiel F, nous le noterons μ_F.*
2. *Soit $U = [W^u_{loc}(p_0), W^{cs}_{loc}(p_0)]$ un petit ouvert possédant la structure de produit local. En restriction à U, l'état de Gibbs μ_F est obtenu par intégration contre la mesure $\lambda^{cs}_{p_0}$ des mesures $\psi^u_{F,p}\lambda^u_p$, où les densités $\psi^u_{F,p}$ sont des fonctions positives définies sur les variétés instables locales telles que pour tout $q \in W^u_{loc}(p)$,*
$$\psi^u_{F,p}(q) = k^u_F(p,q). \tag{2.1.7}$$
3. *En restriction à U, μ_F s'obtient également par intégration contre $\lambda^{cu}_{p_0}$ des mesures $\psi^s_{F,p}\lambda^s_p$, où les densités $\psi^s_{F,p}$ sont des fonctions positives définies sur les variétés stables locales telles que pour tout $q \in W^s_{loc}(p)$:*
$$\psi^s_{F,p}(q) = k^s_F(p,q). \tag{2.1.8}$$

Remarque. Les états de Gibbs ne dépendent pas du potentiel F, mais plutôt de sa *classe de cohomologie*. Plus précisément, si deux potentiels Hölder $F, G : B \to \mathbb{R}$ vérifient $F - G = X.h$, où X représente le champ de vecteurs associé au flot φ_t, h est une fonction Hölder, différentiable dans le direction du flot, et $X.h$ désigne la dérivée dans la direction du flot, alors nous avons $\mu_F = \mu_G$. De plus, $k^\star_G(p,q) = e^{h(q)-h(p)}k^\star_F(p,q)$, et les mesures $\lambda^\star_G$ s'obtiennent à partir de $\lambda^\star_F$ par multiplication par la fonction e^{-h} (avec $\star = u, s, cu$, ou cs). Si de plus $G = F + c$, $c \in \mathbb{R}$, alors tous les objets associés (état de Gibbs, cocycles, familles de mesures) demeurent inchangées. En particulier, l'hypothèse de pression positive que nous aurons à demander plus tard n'est pas restrictive.

Reconstruire les états de Gibbs.

Theorème 2.1.8. *Soit B une variété Riemannienne close, φ_t un flot d'Anosov topologiquement mélangeant de classe C^2, et $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Soit $p \in B$, et $D \subset W^u_{loc}(p)$ de mesure positive pour $\lambda^u_{F,p}$. Alors :*

1. *le mesure*
$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\varphi_t * (\lambda^u_{F,p})_{|D}}{\lambda^u_{F,p}(D)} dt \tag{2.1.9}$$
converge vers μ_F lorsque T tend vers l'infini.
2. *le mesure*
$$\frac{\varphi_T * (\lambda^u_{F,p})_{|D}}{\lambda^u_{F,p}(D)} \tag{2.1.10}$$
converge vers μ_F lorsque T tend vers l'infini.

Remarque. Bien sûr, la première propriété est impliquée par la seconde. Nous aurons besoin des deux propriétés, avec différents buts.

– La première propriété est l'objet de la section 11.2.2 de [BDV] où cette propriété est prouvée lorsque $\lambda^u_{F,p}$ est la mesure de Lebesgue, et la mesure de Gibbs, l'unique mesure SRB. Nous généraliserons leur résultat dans notre preuve de l'existence de mesures de Gibbs pour l'hyperbolicité feuilletée.
– La seconde est une propriété de mélange : nous l'utiliserons comme un argument clé dans la preuve de la proposition 7.1.11.

Le résultat suivant légitime la définition de mesure de Gibbs que nous donnerons pour l'hyperbolicité feuilletée. Il peut être vu comme une adaptation immédiate du corollaire 11.14 de [BDV] pour les états de u-Gibbs.

Corollaire 2.1.9. *Soit B une variété close, φ_t un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2, et $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Alors l'état de Gibbs μ_F est l'unique mesure sur B telle que :*

– *est φ_t-invariante ;*
– *a une désintégration absolument continue par rapport à $(\mathscr{W}^u, \lambda^u_{F,p})$.*

1.2 – États de Gibbs pour le flot géodésique en courbure négative et mesures de Ledrappier

Dans la suite, B est une variété Riemannienne close et courbée négativement. Nous noterons N son revêtement universel Riemannien.

Les états de Gibbs du flot géodésique sur T^1B ont une jolie description dans le revêtement universel. Soit F une fonction Hölder sur T^1B, et $\widetilde{F}$ son relevé au revêtement T^1N. Lorsque z_1 et z_2 sont des points de N, nous utilisons la notation $\int_{z_1}^{z_2}\widetilde{F}$ pour l'intégrale de $\widetilde{F}$ sur la géodésique *dirigée* allant de z_1 à z_2, et paramétrée par longueur d'arc.

Nous allons définir le cocycle suivant sur $N \times N \times N(\infty)$:

$$k^F(z_1,z_2;\xi) = \exp\left[\int_\xi^{z_2}\widetilde{F} - \int_\xi^{z_1}\widetilde{F}\right]\exp[-P(F)\beta_\xi(z_1,z_2)],$$

où β_ξ est le cocycle de Busemann en ξ. Nous faisons usage d'une notation abusive : la différence des intégrales a le sens suivant. Soit un rayon géodésique c qui est asymptote à ξ, alors la limite suivante existe, et ne dépend pas du choix du rayon c :

$$\int_\xi^{z_2} \widetilde{F} - \int_\xi^{z_1} \widetilde{F} = \lim_{T\to\infty} \left(\int_{c(T)}^{z_2} \widetilde{F} - \int_{c(T)}^{z_1} \widetilde{F} \right).$$

Nous étudierons ce cocycle plus en détails dans au chapitre VI.

Mesures sur les variétés centre-instables. Il y a une identification équivariante $T^1N \simeq N \times N(\infty)$, qui trivialise le fuilletage instable. Dans ce contexte, la famille de mesures $(\lambda^{cu}_{F,v})_{v\in T^1B}$ peuvent être relevées aux $N \times \{\xi\}$, $\xi \in N(\infty)$, vues commes feuilles centre-instables. Elles ne dépendent que de ξ, et seront ainsi notées $\widetilde{\lambda}^{cu}_{F,\xi}$. Cette famille vérifie la propriété d'équivariance $\gamma * \widetilde{\lambda}^{cu}_{F,\xi} = \widetilde{\lambda}^{cu}_{F,\gamma\xi}$. De plus, nous avons pour tout $(z,\xi) \in N \times N(\infty)$, et $T \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d[G_T * \widetilde{\lambda}^{cu}_{F,\xi}]}{d\widetilde{\lambda}^{cu}_{F,\xi}}(z) = k^F(z_{-T}, z; \xi),$$

où z_{-T} est le point base de $G_{-T}(v_{\xi,z})$ (c'est la relation (2.1.5)).

Mesures à l'infini. Dans [L3], Ledrappier a prouvé que ce cocycle est, dans sa terminologie, normalisé, et que par conséquent, il se réalise comme cocycle de Radon-Nikodym d'une certaine famille équivariante de mesure à l'infini. Plus précisément, en utilisant une construction à la Patterson-Sullivan, il a prouvé le théorème suivant :

Theorème 2.1.10. *Soit B une variété Riemannienne close et courbée négativement, et N son revêtement universel Riemannien. Alors, il existe une famille $(\nu_z^F)_{z\in N}$ de mesures finies sur $N(\infty)$ qui vérifient :*

1. *la propriété d'équivariance $\gamma * \nu_z^F = \nu_{\gamma z}^F$ pour tout $\gamma \in \pi_1(B)$ et $z \in N$;*
2. *la relation de cocycle suivante pour tous $z_1, z_2 \in N$:*

$$\frac{d\nu^F_{z_2}}{d\nu^F_{z_1}}(\xi) = k^F(z_1, z_2; \xi). \tag{2.1.11}$$

De plus, cette famille est unique à constante multiplicative près.

Le théorème précédent nous donne une autre manière, assez commode, de construire les états de Gibbs pour le flot géodésique :

Theorème 2.1.11. *Soit B une variété Riemannienne close et courbée négativement, et N son revêtement universel Riemannien. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Alors, la mesure $\widetilde{\mu}_F$ définie ci-après ne dépend pas du choix d'un point base $o \in N$, et est invariante par le flot géodésique, ainsi que par l'action diagonale de $\pi_1(B)$:*

$$\widetilde{\mu}_F = k^F(o, z; \xi) \widetilde{\lambda}^{cu}_{F,\xi}(z)\, \nu_o^F(\xi).$$

De plus, après normalisation, la mesure quotient sur T^1B est l'unique état de Gibbs du flot géodésique associé à F.

2 | États de u-Gibbs à densités bornées et mesures de Margulis

Le but de cette section est de présenter un argument dynamique simple, obtenu en collaboration avec Christian Bonatti, pour prouver le fait suivant.

Theorème 2.2.1. *Soit B une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2 $\varphi_t : B \to B$. Supposons qu'en restriction à une feuille instable, la densité de l'unique état de u-Gibbs de φ_t soit bornée. Alors l'état de u-Gibbs coïncide avec la mesure de Bowen-Margulis.*

Ce théorème est d'apparence simple, et d'après François Ledrappier, peut aussi se prouver avec des méthodes cohomologiques. Il apparaît néanmoins que notre argument est assez flexible, et il semble plus que plausible qu'il puisse se généraliser à un cadre partiellement hyperbolique, mais c'est un travail en cours, et la portée de cet argument dépasse le cadre de cette thèse.

En raison d'un résultat dû à Katok [Ka1], à savoir que pour le flot géodésique d'une surface courbée négativement, l'entropie de la mesure de Liouville coïncide avec l'entropie topologique seulement en courbure constante, nous obtenons le résultat de rigidité suivant :

Corollaire 2.2.2. *Soit Σ une surface compacte courbée négativement. Alors nous avons l'alternative suivante :*
- *soit la courbure est constante, et les densités de la mesure de Liouville dans les variétés instables sont partout égales à* 1 *;*
- *soit la courbure est variable, et les densités de la mesure de Liouville dans les variété instables sont toutes non bornées.*

2.1 – États de u-Gibbs et mesure de Bowen-Margulis

Nous donnons ici deux des plus importants états de Gibbs dans la théorie. Ce sont la mesure d'entropie maximale, et la mesure SRB qui, dans ce cas, est l'unique état de u-Gibbs. Dans ce qui suit, le flot d'Anosov φ_t est supposé topologiquement mélangeant.

État de u-Gibbs. Nous allons donner la définition d'un état de u-Gibbs telle qu'elle est donnée dans [BDV]. Ils prouvent en particulier, que cette définition d'apparence faible entraîne la définition donnée par Pesin et Sinaï dès 1982 (voir [PS]).

Définition 2.2.3. *Soit B une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2 $\varphi_t : B \to B$. Un état de u-Gibbs pour φ_t est une mesure de probabilité invariante par le flot et qui, en outre, a une désintégration équivalente à Lebesgue dans les variétés instables.*

Les états de u-Gibbs sont associés au potentiel suivant, que nous rencontrerons à plusieurs reprises dans ce travail :

$$\phi^u(p) = -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \log \mathrm{Jac}^u \varphi_t(p),$$

où $\mathrm{Jac}^u\varphi_t(p)$ représente la fonction $|\det D\varphi_t|$ en restriction à l'espace $E^u(p)$.

Nous avons alors l'unicité de l'état de u-Gibbs, et, par un résultat de [BR], c'est l'unique mesure SRB, dans le sens que le bassin d'attraction de cette mesure est pleine pour la mesure de Lebesgue.

Mesure de Bowen-Margulis. La mesure de Bowen-Margulis est associée au potentiel nul : c'est l'unique mesure d'entropie maximale.

Bowen l'a construite comme mesure d'équidistribution des orbites périodiques dans [Bo1, Bo2], tandis que Margulis a suivi la construction présentée en appendice avec $F = 0$. Les familles de mesures alors construites sur les variétés invariantes sont appelées mesures de Margulis, et leur produit local donne la mesure d'entropie maximale.

2.2 – États de u-Gibbs à densités bornées dans les variétés instables

Densité dans les variétés instables d'un état de u-Gibbs. Le théorème 2.1.7 donne le fait classique suivant (voir [PS]) :

Lemme 2.2.4. *Dans la variété instable locale de p, la densité de l'unique état de u-Gibbs de φ_t est donnée à une constante multiplicative près par :*

$$\psi_p^u(q) = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{Jac}^u\varphi_{-T}(q)}{\mathrm{Jac}^u\varphi_{-T}(p)}. \tag{2.2.12}$$

Ces densités peuvent évidemment être prolongées à toute la variété instable par la formule (2.2.12). Bien sûr, il y a une ambiguïté lorsqu'on parle de *la* densité, puisqu'elles ne sont définies qu'à une constante multiplicative près.

Continuité des densités. Nous aurons besoin du résultat de continuité suivant pour déduire de ce que la densité de l'état de u-Gibbs dans *une* feuille instable est bornée, qu'elles le sont toutes.

Lemme 2.2.5. *Soit $p \in B$ et $q \in W^u(p)$. Alors pour toutes suites $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}, (q_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ telles que $q_k \in W^u(p_k)$ avec $\mathrm{dist}_u(p_k, q_k)$ uniformément majoré pour tout k, et qui convergent respectivement vers p et q, :*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{p_k}^u(q_k) = \psi_p^u(q).$$

Preuve. Considérons p, q, p_k, q_k comme dans l'énoncé du lemme. Soit $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ tel que $\mathrm{dist}_u(p,q) < R$, et $\mathrm{dist}_u(p_k, q_k) < R$ pour tout k. Les densités locales étant unifomément log-Hölder, il existe un temps $T(R) > 0$ tel que pour tout couple z_1, z_2 appartenant à une même variété instable et distants d'au plus R, $\varphi_{-T(R)}(z_1)$ et $\varphi_{-T(R)}(z_2)$ soient suffisamment proches de sorte que $\psi^u_{\varphi_{-T(R)}(z_1)}(\varphi_{-T(R)}(z_2)) \in [e^{-\varepsilon/4}, e^{\varepsilon/4}]$.

Utilisons la continuité de la fonction $\mathrm{Jac}^u\varphi_{-T(R)}$: dès que z_1 et z_2 sont suffisamment proches, on a :

$$\frac{\mathrm{Jac}^u\varphi_{-T(R)}(z_2)}{\mathrm{Jac}^u\varphi_{-T(R)}(z_1)} \in [e^{-\varepsilon/4}, e^{\varepsilon/4}].$$

En utilisant une chain rule, nous trouvons donc que dès que k est suffisamment grand :

$$\frac{\psi_p^u(q)}{\psi_{p_k}^u(q_k)} = \frac{\psi^u_{\varphi_{-T(R)}(p)}(\varphi_{-T(R)}(q))}{\psi^u_{\varphi_{-T(R)}(p_k)}(\varphi_{-T(R)}(q_k))} \frac{\mathrm{Jac}^u\varphi_{-T(R)}(q)}{\mathrm{Jac}^u\varphi_{-T(R)}(q_k)} \frac{\mathrm{Jac}^u\varphi_{-T(R)}(p_k)}{\mathrm{Jac}^u\varphi_{-T(R)}(p)} \in [e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon}].$$

Ceci conclut la preuve du lemme. □

Densités log-bornées. S'il y a une ambiguïté à parler de la densité de l'u-Gibbs dans une feuille instable, il n'y en a en revanche aucune lorsque l'on dit que la densité dans une feuille instable est log-bornée : en effet si jamais ψ_p^u est log-bornée sur toute la variété instable de p, il en en est de même des densités ψ_q^u pour tout $q \in W^u(p)$, puisque l'on a la relation :

$$\log \psi_q^u = \log \psi_p^u - \log \psi_p^u(q).$$

Proposition 2.2.6. *Supposons qu'il existe une feuille instable où la densité de l'état de u-Gibbs est log-bornée. Alors les densités de l'u-Gibbs sont log-bornées dans toutes les feuilles avec une borne uniforme.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du lemme de continuité 2.2.5, ainsi que du fait que le feuilletage instable est minimal : en particulier la feuille où la densité est log-bornée est dense dans toute la variété. □

Dans le cas où toutes les densités sont bornées, nous avons un lemme immédiat, mais primordial, qui nous permet de contrôler les distorsions de volume dûes aux itérations positive et négative de f dans les variétés instables.

Lemme 2.2.7. *Supposons qu'il existe une variété instable où la densité de l'état de u-Gibbs est bornée. Il existe alors une constante $C > 1$ telle que pour tous p, q appartenant à une même variété instable, et tout $t \in \mathbb{R}$*

$$C^{-1} \leq \frac{\mathrm{Jac}^u \varphi_t(q)}{\mathrm{Jac}^u \varphi_t(p)} \leq C,$$

Preuve. Une chain rule donne, lorsque $T, t \in \mathbb{R}$, et p, q dans la même variété instable :

$$\frac{\mathrm{Jac}^u \varphi_{-T-t}(q)}{\mathrm{Jac}^u \varphi_{-T-t}(p)} = \frac{\mathrm{Jac}^u \varphi_{-T}(\varphi_{-t}(q))}{\mathrm{Jac}^u \varphi_{-T}(\varphi_{-t}(p))} \frac{\mathrm{Jac}^u \varphi_{-t}(q)}{\mathrm{Jac}^u \varphi_{-t}(p)}.$$

En faisant tendre T vers l'infini, nous trouvons donc :

$$\frac{\mathrm{Jac}^u \varphi_{-t}(q)}{\mathrm{Jac}^u \varphi_{-t}(p)} = \psi_p^u(q)\ \psi^u_{\varphi_{-t}(q)}(\varphi_{-t}(p)),$$

qui est log-borné indépendamment de p et q dans la même variété instable puisque d'après la proposition 2.2.6, les densités sont uniformément log-bornées dans toutes feuilles instables. □

2.3 – Borner les fonctionnelles de Margulis

La famille de fonctionnelles de Margulis. Nous définissons famille de fonctionnelles sur l'espace $C_c(\mathscr{W}^{cu})$ des fonctions continues à support compact dans les feuilles centre-instables, que l'on appelle *fonctionnelles de Margulis* et qui ont la forme suivante :

$$L_t(f) = \frac{\int f \circ \varphi_{-t}\, d\mathrm{Leb}^{cu}}{\int f_0 \circ \varphi_{-t}\, d\mathrm{Leb}^{cu}},$$

où $f \in C_c(\mathscr{W}^{cu})$, et f_0 est une fonction du même espace qui sera désormais *fixée*, et qui a été choisie de sorte que $f_0 \geq 1$ sur un disque centre-instable noté A.

Proposition 2.2.8. *Supposons qu'il existe une feuille instable où la densité de l'état de u-Gibbs est log-bornée. Alors il existe une constante $K > 1$ telle quel que soit $t \geq 0$, et $f \in C_c^+(\mathscr{W}^{cu})$, nous ayons :*

$$K^{-1} \frac{\int f\, d\mathrm{Leb}^{cu}}{\int f_0\, d\mathrm{Leb}^{cu}} \leq L_t(f) \leq K \frac{\int f\, d\mathrm{Leb}^{cu}}{\int f_0\, d\mathrm{Leb}^{cu}}. \tag{2.2.13}$$

Restrictions sur le support. Nous allons, pour prouver cette proposition, effectuer de nouveau un raisonnement, de compacité, et utiliser l'absolue continuité du feuilletage stable.

Un argument de compacité dû à Margulis fournit deux nombres $\varepsilon(A)$ et $r(A)$ tels que pour toute partie Borélienne D d'une variété centre-instable qui a un diamètre inférieur à $r(A)$, il existe une transformation d'holonomie stable $\mathrm{hol}^s_{D\to A} : D \to A$ telle que pour tout $p \in D$, $\mathrm{dist}_s(p, \mathrm{hol}^s_{D\to A}(p)) \leq \varepsilon(A)$.

Lemme 2.2.9. *Nous pouvons ramener la preuve de la proposition 2.2.8 au cas où des fonctions aux supports de diamètres inférieurs à $r(A)$.*

Preuve. Supposons que nous sachions prouver la proposition 2.2.8 pour toute fonction dont le support est de diamètre inférieur à $r(A)$. Soit $f \in C^+_c(\mathcal{W}^{cu})$ (c'est-à-dire $f \in C^+_c(\mathcal{W}^{cu})$). Nous pouvons recouvrir un disque contenant le support de f par une partition finie de l'unité $(V_i, g_i)_{i\in I}$, de sorte que chaque V_i a un diamètre $\leq r(A)$.

Par hypothèse, l'encadrement (2.2.13) a lieu pour chacune des fonctions $f g_i$, et de plus chacun des termes de cet encadrement est linéaire en f : en sommant sur i ces encadrements, nous trouvons alors que l'encadrement a lieu, avec les même constantes, pour la fonction f. Nous pouvons donc conclure. □

Lemme 2.2.10. *Nous pouvons ramener la preuve de la proposition 2.2.8 au cas des fonctions dont le support est inclus dans A.*

Preuve. Supposons que nous sachions prouver la proposition 2.2.8 pour toutes les fonctions dont le support est inclus dans A. Par le lemme précédent, nous n'avons qu'à traiter le cas des fonctions aux supports de diamètres inférieurs pour en déduire le cas général.

Prenons alors une fonction $f \in C^+_c(\mathcal{W}^{cu})$ dont le support a un diamètre $\leq r(A)$. Nous savons qu'alors, il y a une application d'holonomie stable, qui est un homéomorphisme, $\mathrm{hol}^s_{D\to D'} : D \to D' \subset A$ telle que pour tout $p \in D$, nous ayons $\mathrm{dist}_s(p, \mathrm{hol}^s_{D\to D'}(p)) \leq \varepsilon(A)$. Posons donc $g = f \circ (\mathrm{hol}^s_{D\to D'})^{-1}$.

En utilisant, comme dans la preuve du lemme 2.3.1, l'absolue continuité des transformations d'holonomie stable, nous trouvons un temps T, ne dépendant que de $\varepsilon(A)$ tel que dès que $t \geq T$:

$$\frac{1}{2}\int f \circ \varphi_{-t} d\mathrm{Leb}^{cu} \leq \int g \circ \varphi_{-t} d\mathrm{Leb}^{cu} \leq 2 \int f \circ \varphi_{-t} d\mathrm{Leb}^{cu}.$$

Puisque l'encadrement (2.2.13) a, par hypothèse, lieu pour la fonction g et ce pour tout t, il a également lieu pour f, et ce pour tout $t \geq T$. Nous concluons en utilisant les bornes uniformes sur la variété compacte B de $\mathrm{Jac}^{cu}\varphi_t$ pour $t \in [0, T]$. □

Fin de la preuve de la proposition 2.2.8. Il est suffisant de prouver la majoration, la minoration suivant par un argument symétrique. Par ce qui précède, il nous suffit de traiter le cas d'une fonction positive ou nulle f à support compact inclus dans A. Puisque $f_0 \geq 1$ sur A, nous pouvons écrire, pour tout $T \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\int f \circ \varphi_{-T} d\mathrm{Leb}^{cu}}{\int f_0 \circ \varphi_{-T} d\mathrm{Leb}^{cu}} &\leq \frac{\int_A f \mathrm{Jac}^{cu}\varphi_T \, d\mathrm{Leb}^{cu}}{\int_A \mathrm{Jac}^{cu}\varphi_T \, d\mathrm{Leb}^{cu}} \\
&\leq \mathop{\mathrm{Sup}}_{p,q\in A} \frac{\mathrm{Jac}^{cu}\varphi_T(p)}{\mathrm{Jac}^{cu}\varphi_T(q)} \frac{\int_A f \, d\mathrm{Leb}^{cu}}{\mathrm{Leb}^{cu}(A)}.
\end{aligned}$$

Il est alors suffisant de borner le quotient des Jacobiens dans la direction centre-instable sur le disque A, et ce indépendamment de p, q. Tout d'abord, puisque la norme du champ de vecteurs, ainsi que l'angle entre le flot et la direction instable sont uniformément log-bornés, les Jacobiens dans la direction centre-instable sont en rapport uniformément log-borné avec les Jacobiens dans la direction instable forte.

D'autre part, puisque A est compact, les segments d'orbites inclus dans A sont uniformément bornés, de sorte que le rapport des Jacobiens instables pour deux points de A sur le même segment d'orbite soit uniformément log-borné. Nous pouvons donc nous ramener, par holonomie le long du flot, à borner le rapport des Jacobiens instables sur une partie incluse dans une feuille instable : et cela, nous savons le faire par le lemme 2.2.7.

Nous pouvons donc achever la preuve de la proposition 2.2.8. □

2.4 – **Preuve du théorème 2.2.1.**

Pour prouver le théorème, nous allons suivre pas à pas la construction des mesures de Margulis, et montrer qu'elles sont équivalentes à la mesure de Lebesgue avec des densités bornées.

Comme nous le verrons en appendice, la famille des mesures de Margulis se construit en faisant agir le flot sur les espaces convexes compacts :

$$\mathscr{X}_T = \mathrm{Adh}\left[\mathrm{Conv}\left\{\frac{L_t}{L_t(f_0)}; t \geq T\right\}\right],$$

et, vue comme fonctionnelle sur $C_c(\mathscr{W}^{cu})$, cette famille est un élément, en fait le seul par unique ergodicité du feuilletage stable (voir [BM]), de $\mathscr{X}_\infty = \bigcap_{T\geq 0}\mathscr{X}_T$.

En utilisant la proposition 2.2.8, nous obtenons pour tout $T \geq 0$, tout $L \in \mathscr{X}_T$, et tout $f \in C_c^+(\mathscr{W}^{cu})$, $L(f) \in [K^{-1}, K]\int f d\mathrm{Leb}^{cu} / \int f_0 d\mathrm{Leb}^{cu}$. En faisant tendre T vers l'infini, nous trouvons, si $(\lambda_{0,p}^{cu})_{p\in B}$ désigne la famille des mesures de Margulis sur les variétés centre-instables, une constante $K \geq 1$ telle que :

$$K^{-1}\frac{\int f d\mathrm{Leb}^{cu}}{\int f_0 d\mathrm{Leb}^{cu}} \leq \int f d\lambda_{0,p}^{cu} \leq K\frac{\int f d\mathrm{Leb}^{cu}}{\int f_0 d\mathrm{Leb}^{cu}}.$$

Nous en déduisons donc que le volume dans les feuilles centre-instables est équivalent à la mesure de Margulis avec des densités de Radon-Nikodym uniformément log-bornées. En d'autres termes, l'unique état de u-Gibbs de φ_t est une mesure de probabilité invariante par le flot, et qui a une désintégration absolument continue par rapport à $(\mathscr{W}^{cu}, \lambda_{0,p}^{cu})$. Mais par notre description des états de Gibbs, seule la mesure de Bowen-Margulis satisfait à cette propriété. C'est donc que ces deux mesures sont égales. La preuve du théorème est donc terminée. □

3 | Appendice : une construction à la Margulis des mesures conditionnelles des états de Gibbs

Le but de cet appendice est de présenter une construction de la structure de produit local des états de Gibbs pour les flots d'Anosov topologiquement mélangeants. Nous avons conscience que cette construction est assez folklorique, et sans doute bien connue des spécialistes. Néanmoins, nous présentons le détail de la construction puisque nous n'en avons pas trouvé de trace explicite dans la littérature, et puisque nous avons besoin de la construction de Margulis dans la preuve du théorème 2.2.1. De plus, nous avions cherché dans cette direction dans l'espoir de construire des familles de mesures analogues dans des cas où nous ne disposons pas de description symbolique claire de la dynamique, par exemple dans un cadre hyperbolique feuilleté.

Dans tout ce qui suit, nous considérons une variété Riemannienne close B, qui porte un flot d'Anosov de classe C^2 et topologiquement mélangeant φ_t.

Nous rappelons que dire que le flot d'Anosov est topologiquement mélangeant revient à dire que les variétés stables et instables sont denses dans B. En particulier, un argument de compacité dû à Margulis, voir [M], nous dit que pour tout domaine relativement compact A d'une variété centre-instable, il existe deux réels positifs *uniformes* $\varepsilon(A)$ et $r(A)$ positifs tels que pour tout $p \in B$, il existe une transformation d'holonomie le long du feuilletage stable

$$\mathrm{hol}^s_{p\to A} : B^{cu}(p, r(A)) \to A,$$

avec pour tout $p' \in B^{cu}(p, r(A))$:

$$\mathrm{dist}_s(p', \mathrm{hol}^s_{p\to A}(p')) \le \varepsilon(A).$$

Dans la terminologie de Margulis, nous disons que la boule centre-instable $B^{cu}(p, r(A))$ est $\varepsilon(A)$-équivalente à une partie de A.

3.1 – Fonctionnelles sur les variétés centre-instables

Définition des fonctionnelles. Étant donné un potentiel Hölder, nous allons considérer le poids suivant :

$$k^F_t(p) = \exp\left[\int_0^t F\circ\varphi_{-s}(p)\,ds\right]. \tag{2.3.14}$$

Ce poids vérifie la relation de cocycle suivante, pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et $p \in B$:

$$k^F_{t_1+t_2}(p) = k^F_{t_2}(p)\,k^F_{t_1}(\varphi_{-t_2}(p)) \tag{2.3.15}$$

Nous considérons l'ensemble des fonctions continues à support compact dans une feuille centre-instable, que nous notons $C_c(\mathcal{W}^{cu})$. Sur cet ensemble, dont nous étudierons la topologie plus tard, nous pouvons définir la famille de fonctionnelles par :

$$L^F_t(f) = \int k^F_t\, f\circ\varphi_{-t}\, d\mathrm{Leb}^{cu}. \tag{2.3.16}$$

Lemmes techniques. Nous allons donner deux lemmes qui premettront d'étudier la continuité des fonctionnelles précédentes.

Lemme 2.3.1. *Soit A un domaine relativement compact inclus dans une variété centre-instable. Il existe un réel $C(A) > 0$ tel que pour tous $p \in B$ et tout $t \ge 0$,*

$$\int_{\varphi_t(B^{cu}(p,r(A)))} k^F_t\, d\mathrm{Leb}^{cu} \le C(A)\int_{\varphi_t(A)} k^F_t\, d\mathrm{Leb}^{cu}.$$

Preuve. Considérons les deux constantes uniformes $r(A)$ et $\varepsilon(A)$ que nous avions définies précédemment : pour rappel, toute boule centre-instable de rayon $r(A)$ est $\varepsilon(A)$-équivalente à une partie de A.

Soit alors $p \in B$ et X l'image de $B^{cu}(p, r(A))$ par holonomie stable : si $q \in B^{cu}(p, r(A))$ et $q' = \mathrm{hol}^s_{p\to A}(q) \in X$, nous avons $\mathrm{dist}_s(q, q') \le \varepsilon(A)$.

Nous pouvons alors écrire :

$$\frac{\int_{\varphi_t(B^{cu}(p,r(A)))} k_t^F \, d\mathrm{Leb}^{cu}}{\int_{\varphi_t(X)} k_t^F \, d\mathrm{Leb}^{cu}} \leq \sup_{q\in B^{cu}(p,r(A))} \left(\frac{k_t^F(\varphi_t(q))}{k_t^F(\varphi_t(\mathrm{hol}^s_{p\to A}(q)))} \right) \frac{\mathrm{Leb}^{cu}(\varphi_t(B^{cu}(p,r(A))))}{\mathrm{Leb}^{cu}(\varphi_t(X))}.$$

D'une part, pour tout $q \in B^{cu}(p,r(A))$, et $q' = \mathrm{hol}^s_{p\to A}(q)$, on a $\log(k^F(\varphi_t(q))/k^F(\varphi_t(q'))) = \int_0^t (F\circ\varphi_{t-s}(q) - F\circ\varphi_{t-s}(q'))ds$. En utilisant que $\mathrm{dist}_s(q,q') \leq \varepsilon(A)$, que par itération positive, φ_t contracte exponentiellement vite les distances stables, et que F est uniformément Hölder continue, nous trouvons que cette intégrale est majorée par une constante ne dépendant que de A.

D'autre part, le flot commute avec l'holonomie stable de sorte que $\varphi_t(q') = \mathrm{hol}^s_{\varphi_t(p)\to\varphi_t(X)}(\varphi_t(q))$, et le feuilletage stable est absolument continu. Puisque la distance entre $\varphi_t(q)$ et $\varphi_t(q')$ tend vers zéro uniformément, la transformation d'holonomie $\mathrm{hol}^s_{\varphi_t(p)\to\varphi_t(X)}$ a un Jacobien qui tend uniformément vers 1. En particulier, le quotient $\mathrm{Leb}^{cu}(\varphi_t(B^{cu}(p,r(A))))/\mathrm{Leb}^{cu}(\varphi_t(X))$ est bornée par une quantité ne dépendant que de A.

Puisque $\varphi_t(X)\subset\varphi_t(A)$, on a :

$$\int_{\varphi_t(X)} k_t^F \, d\mathrm{Leb}^{cu} \leq \int_{\varphi_t(A)} k_t^F \, d\mathrm{Leb}^{cu},$$

et nous pouvons conclure la preuve du lemme. □

Lemme 2.3.2. *Soit $f \in C_c(\mathcal{W}^{cu})$ positive ou nulle. Alors pour toute fonction positive à support compact $g \in C_c(\mathcal{W}^{cu})$, il existe une constante $C(g)$ telle que on a pour tout $t \geq 0$:*

$$L_t^F(g) \leq C(g) L_t^F(f).$$

Preuve. Nous allons raisonner en deux temps. Nous allons dans un premier temps comparer $L_t^F(g)$ avec l'intégrale de k_t^F sur $\varphi_t(A)$, où A est un domaine centre-instable relativement compact. Dans un second temps, nous choisirons un ouvert A de sorte que l'on puisse comparer cette intégrale avec $L_t^F(f)$.

Tout d'abord, si g est continue et positive à support inclus dans K, nous avons pour tout $t \geq 0$, $L_t^F(g) \leq ||g||_\infty \int_{\varphi_t(K)} k_t^f \, d\mathrm{Leb}^{cu}$.

Il est possible de recouvrir le compact K par un nombre fini N, ne dépendant que de K, de boules de rayon $r(A)$. L'intégrale de k_t^F sur l'image de chacune de ces boule par φ_t est bornée indépendamment de t par $C(A)$ fois l'intégrale du même poids sur $\varphi_t(A)$. Ainsi, nous trouvons :

$$\int k_t^F g\circ\varphi_{-t} \, d\mathrm{Leb}^{cu} \leq ||g||_\infty N C(A) \int_{\varphi_t(A)} k_t^F \, d\mathrm{Leb}^{cu}.$$

L'idée présente dans [M] est de considérer l'ouvert relativement compact $A = \{f > \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, puis de remarquer que :

$$\int_{\varphi_t(A)} k_t^F \, d\mathrm{Leb}^{cu} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int k_t^F f\circ\varphi_{-t} \, d\mathrm{Leb}^{cu}.$$

En combinant les deux inégalités, nous concluons la preuve du lemme. □

Action continue sur les fonctionnelles. L'espace $C_c(\mathscr{W}^{cu})$ n'est pas un espace vectoriel a priori : la somme de deux fonctions n'est dans $C_c(\mathscr{W}^{cu})$ que si elles sont définies sur la même feuille.

Nous pouvons néanmoins définir l'ensemble $\mathscr{L}$ des fonctionnelles L sur $C_c(\mathscr{W}^{cu})$ telle que pour tout $p \in B$, $L_{|C_c^{cu}(W^{cu}(p))}$ soit une fonctionnelle linéaire. C'est ainsi naturellement un espace vectoriel topologique localement convexe. Nous pouvons aussi considérer le sous-ensemble $C_c^+(\mathscr{W}^{cu})$ constitué des fonctions positives, ainsi que l'ensemble $\mathscr{L}^+$ des fonctionnelles positives, c'est-à-dire qui sont positives sur les fonctions positives.

Il est possible munir $\mathscr{L}$ de la topologie produit, en identifiant $\mathscr{L}$ avec $\prod_{f \in C_c(\mathscr{W}^{cu})} \mathbb{R}_f$, grâce à la correspondance $L \mapsto (L(f))_{f \in C^c(\mathscr{W}^{cu})}$.

Le flot φ_t agit naturellement sur l'ensemble des fonctionnelles $\mathscr{L}$ par l'application suivante, où $L \in \mathscr{L}$ et $g \in C_c(\mathscr{W}^{cu})$:

$$\Phi_t^F L(f) = L[k_t^F f \circ \varphi_{-t}].$$

Nous aurons aussi à considérer la normalisation suivante :

$$\widehat{\Phi}_t^F L = \frac{\Phi_t^F L}{\Phi_t^F L(f_0)},$$

où $f_0 \in C_c^+(\mathscr{W}^{cu})$ est une fonction de référence que nous fixerons. Pour se fixer les idées, on peut supposer que $f_0 \geq 1$ sur un domaine centre-instable relativement compact A.

Lemme 2.3.3. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les actions Φ_t^F et $\widehat{\Phi}_t^F$ sur $\mathscr{L}$ sont continues.*

Preuve. Nous avons muni $\mathscr{L}$ de la topologie produit : en particulier, elle est engendrée par les produits finis d'intervalles de $\mathbb{R}$. Considérons un ensemble fini de fonctions de $C_c(\mathscr{W}^{cu})$, $(f_i)_{i=1,\dots,k}$, et un nombre fini d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $(I_i)_{i=1,\dots,k}$. Soit l'ouvert $U = \{L \in \mathscr{L}; L(f_i) \in I_i \ i = 1,\dots,k\}$. Nous avons :

$$\left(\Phi_t^F\right)^{-1} U = \left\{L \in \mathscr{L};\ L(k_{-t}^F f_i \circ \phi_t) \in I_i,\ i = 1,\dots,k\right\} :$$

c'est encore un ouvert de $\mathscr{L}$.

C'est donc que Φ_t, et donc $\widehat{\Phi}_t$, est continue. □

Nous avons défini la famille de fonctionnelles L_t^F par la formule 2.3.16. Nous remarquons que, par la formule de cocycle 2.3.15, nous avons les relations suivantes pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{t_1}^F \Phi_{t_2}^F = \Phi_{t_1+t_2}^F \quad \text{et} \quad \widehat{\Phi}_{t_1}^F \widehat{\Phi}_{t_2}^F = \widehat{\Phi}_{t_1+t_2}^F \tag{2.3.17}$$

$$\Phi_{t_1}^F L_{t_2}^F = L_{t_1+t_2}^F \quad \text{et} \quad \widehat{\Phi}_{t_1}^F \left(\frac{L_{t_2}^F}{L_{t_2}(f_0)}\right) = \frac{L_{t_1+t_2}^F}{L_{t_1+t_2}^F(f_0)}. \tag{2.3.18}$$

3.2 – Application d'un théorème de point fixe

Convexe compact de fonctionnelles. Pour une partie $\mathscr{Y}$ de $\mathscr{L}$, nous noterons Conv$\mathscr{Y}$ l'enveloppe convexe de $\mathscr{Y}$, et Adh$\mathscr{Y}$, son adhérence. Nous définissons l'ensemble convexe :

$$\mathscr{X}_0 = \mathrm{Adh}\left[\mathrm{Conv}\left\{\frac{L_t^F}{L_t^F(f_0)};\ t \geq 0\right\}\right],$$

où f_0 est la fonction que nous avions fixée dans le paragraphe précédent.

Lemme 2.3.4. *Tous les éléments de $\mathscr{X}$ sont des fonctionnelles positives.*

Preuve. Puisque toutes les fonctionnelles L_t^F sont des fonctionnelles positives, il en est de même pour toute combinaison convexe de $L_t^F/L_t^F(f_0)$. Reste à voir que le fait d'être positif passe à l'adhérence. Mais ceci est vrai puisque la topologie sur $\mathscr{L}$ est celle de la convergence ponctuelle. □

Lemme 2.3.5. *Le convexe $\mathscr{X}_0$ est compact.*

Preuve. Nous allons prouver que pour toute fonction $f \in C_c(\mathscr{W}^{cu})$, les quotients $L_t^F(f)/L_t(f_0)$ sont bornés indépendamment de $t \geq 0$. En traitant séparément les parties positives et négatives, nous voyons qu'il suffit pour cela de prouver que pour toute fonction positive $f \in C_c^+(\mathscr{W}^{cu})$, les quotients $L_t^F(f)/L_t(f_0)$ sont majorés indépendamment de t. Ce dernier point est une application immédiate du lemme 2.3.2.

Ainsi pour tout $f \in C_c(\mathscr{W}^{cu})$, il existe deux constantes $c(f)$ et $C(f)$ ne dépendant que de f tel que l'on ait $L(f) \in [c(f), C(f)]$ pour tout L s'écrivant comme combinaison convexe de quotients $L_t/L_t(f_0)$, avec $t \geq 0$. Mais ces bornes passent à l'adhérence, et nous obtenons $L(f) \in [c(f), C(f)]$ pour tout $L \in \mathscr{X}_0$.

Puisque $\mathscr{X}_0$ est fermé, et que le produit de segments compacts $[c(f), C(f)]$, $f \in C_c(\mathscr{W}^{cu})$ est compact par le théorème de Tychonov, on a bien $\mathscr{X}_0$ compact pour la topologie produit. □

Pour tout $T \geq 0$, nous allons considérer l'ensemble compact (par le lemme précédent) :

$$\mathscr{X}_T = \mathrm{Adh}\left[\mathrm{Conv}\left\{\frac{L_t^F}{L_t^F(f_0)} ; t \geq T\right\}\right],$$

ainsi que :

$$\mathscr{X}_\infty = \bigcap_{T \geq 0} \mathscr{X}_T,$$

qui est un ensemble compact non vide, comme intersection décroissante de compacts.

Lemme 2.3.6. *Nous avons pour tout $t \geq 0$, et tout $T \geq 0$ $\widehat{\Phi}_t \mathscr{X}_T \subset \mathscr{X}_T$*

Preuve. Il vient directement de la relation 2.3.18 que lorsque $t \geq 0$, $\widehat{\Phi}_t$ préserve l'ensemble des combinaisons convexes de $L_{t_i}^F/L_{t_i}$, avec $t_i \geq T$. Nous concluons en utilisant la continuité de $\widehat{\Phi}_t$ (voir le lemme 2.3.3). □

Proposition 2.3.7. *Il existe donc un élément $\mathfrak{m} \in \mathscr{X}_\infty$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\Phi_t}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.*

Preuve. Nous utilisons le théorème de point fixe de Schauder : toute application continue laissant invariante une partie compacte convexe d'un espace vectoriel topologique localement convexe possède un point fixe.

Nous concluons par la continuité de $\widehat{\Phi}_t$, et par la compacité de $\mathscr{X}$ (voir les lemmes 2.3.3 et 2.3.6).
□

Propriétés du point fixe. Nous étudions dans un premier temps l'action des transformations d'holonomie stables sur la fonctionnelle $\mathfrak{m}$. Nous rappelons la définition du cocycle k^s donnée par la relation (2.1.1) :

$$k_F^s(p,q) = \exp\left[\int_0^\infty (F \circ \varphi_t(q) - F \circ \varphi_t(p))\,dt\right] \text{ pour } p, q \text{ dans la même feuille stable.}$$

Proposition 2.3.8. *Soit $f \in C_c(\mathscr{W}^{cu})$, $p \in \mathrm{Supp}(f)$, et $p' \in W^s(p)$. Nous avons alors :*

$$\mathfrak{m}(f \circ \mathrm{hol}^s_{p' \to p}) = \mathfrak{m}(f\, k_F^s(., \mathrm{hol}^s_{p \to p'}(.))),$$

où $f \circ \mathrm{hol}^s_{p' \to p}$ est restreinte au domaine d'une transformation d'holonomie $\mathrm{hol}^s_{p' \to p}$, et $f\, k_F^s(., \mathrm{hol}^s_{p \to p'}(.))$ est restreinte au but de cette transformation.

Preuve. Soit $f \in C_c(\mathscr{W}^{cu})$, $p \in \mathrm{Supp}(f)$, et $p' \in W^s(p)$. Nous allons prouver que la différence suivante tend vers 0 lorsque T tend vers ∞ :

$$\mathfrak{m}_T\left(\frac{f \circ \mathrm{hol}^s_{p' \to p}}{k^s_F(\mathrm{hol}^s_{p' \to p}(.),.)}\right) - \mathfrak{m}_T(f),$$

indépendamment de $\mathfrak{m}_T \in \mathscr{X}_T$ et où on a restreint le quotient au domaine de définition d'une transformation d'holonomie $\mathrm{hol}^s_{p' \to p}$, et f au but de cette transformation.

Étant donné que $\mathfrak{m} \in \mathscr{X}_\infty = \bigcap_{T \geq 0} \mathscr{X}_T$, on trouvera bien l'égalité désirée pour toute fonction continue.

Soit $T \geq 0$. Définissons la fonction suivante sur un domaine compact d'holonomie stable K' :

$$g = \frac{f \circ \mathrm{hol}^s_{p' \to p}}{k^s_F(\mathrm{hol}^s_{p' \to p}(.),.)}.$$

Nous notons K l'image de K' par la transformation d'holonomie $\mathrm{hol}^s_{p' \to p}$. En utilisant l'absolue continuité du feuilletage stable, nous trouvons :

$$L^F_T(g) = \int_{\varphi_T(K)} \frac{k^F_T(\mathrm{hol}^s_{\varphi_T(p) \to \varphi_T(p')}(q))}{k^s_F(\varphi_{-T}(q), \mathrm{hol}^s_{p' \to p}(\varphi_{-T}(q)))} f \circ \varphi_{-T}(q) \mathrm{Jac}\,\mathrm{hol}^s_{\varphi_T(p) \to \varphi_T(p')}(q)\, d\mathrm{Leb}^{cu}(q).$$

Pour $q \in \varphi_T(K)$, posons $q' = \mathrm{hol}^s_{\varphi_T(p) \to \varphi_T(p')}(q)$, et considérons la quantité suivante :

$$R_T(q) = \frac{k^F_T(q')}{k^F_T(q) k^s_F(\varphi_{-T}(q), \varphi_{-T}(q'))} \mathrm{Jac}\,\mathrm{hol}^s_{\varphi_T(p) \to \varphi_T(p')}(q).$$

Nous trouvons alors :

$$L_T(g) - L_T(f) = \int_{\varphi_T(K)} (R_T(q) - 1) k^F_T(q) f(\varphi_{-T}(q)) d\mathrm{Leb}^{cu}(q).$$

Il s'agit alors de contrôler $R_T(q) - 1$ par une quantité tendant vers zéro indépendamment de q. D'une part, puisque la distance $\mathrm{dist}_s(\varphi_T(p), \varphi_T(p'))$ tend vers zéro, le Jacobien de la transformation d'holonomie $\mathrm{hol}^s_{\varphi_T(p) \to \varphi_T(p')}$ tend vers 1 indépendamment de q.

D'autre part, on a :

$$\frac{k^F_T(q')}{k^F_T(q) k^s_F(\varphi_{-T}(q), \varphi_{-T}(q'))} = \exp\left[\int_T^\infty (F \circ \varphi_t(\varphi_{-T}(q)) - F \circ \varphi_t(\varphi_{-T}(q'))) dt\right].$$

L'intégrale tend uniformément vers 0, puisque F est Hölder et que $\varphi_{-T}(q) \in K$ et $\varphi_{-T}(q') \in K'$ sont à distance uniformément majorée sur K. Par conséquent, $R_T(q)$ converge vers 1 uniformément en T.

Nous trouvons donc :

$$\left|\frac{L_T(g)}{L_T(f_0)} - \frac{L_T(f)}{L_T(f_0)}\right| \leq \sup_{q \in \varphi_T(K)} |R_T(q) - 1| \frac{\int k^F_T f \circ \varphi_{-T} d\mathrm{Leb}^{cu}}{\int k^F_T f_0 \circ \varphi_{-T} d\mathrm{Leb}^{cu}}.$$

Par le lemme 2.3.2, le second facteur est borné uniformément. Nous pouvons donc conclure que $\frac{L_T(g)}{L_T(f_0)} - \frac{L_T(f)}{L_T(f_0)}$ tend vers zéro uniformément.

Nous pouvons donc conclure que $\mathfrak{m}_T(g) - \mathfrak{m}_T(f)$ est d'autant plus petit que T est grand, et ce indépendamment de $\mathfrak{m}_T \in \mathscr{X}_T$ (nous pouvons écrire $\mathfrak{m}_T$ comme combinaison convexe de $L_{t_i}/L_{t_i}(f_0)$ pour $t_i \geq T$). Nous pouvons donc en déduire que $\mathfrak{m}(g) = \mathfrak{m}(f)$, ce qui nous permet de conclure. □

Proposition 2.3.9. *Il existe un nombre réel P_F tel que pour toute fonction continue $f \in C_c(\mathscr{W}^{cu})$ et tout $T \in \mathbb{R}$,*

$$\mathfrak{m}(f \circ \varphi_T) = e^{-TP_F}\mathfrak{m}(k_T^F f).$$

Preuve. Soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $a_t = \mathfrak{m}(k_t^F f_0 \circ \varphi_t)$. Nous tirons de la relation de cocycle 2.3.15, et du fait que $\mathfrak{m}$ soit point fixe de $\widehat{\Phi}_s$ que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$:

$$a_{s+t} = \mathfrak{m}[k_s^F (k_t^F \circ \varphi_{-s})(f_0 \circ \varphi_{-t} \circ \varphi_{-s})] = \mathfrak{m}(k_s^F f_0 \circ \varphi_{-s})\widehat{\Phi}_s \mathfrak{m}(k_t^F f \circ \varphi_{-t}) = \mathfrak{m}(k_s^F f_0 \circ \varphi_{-s})\mathfrak{m}(k_t^F f \circ \varphi_{-t}) = a_s a_t.$$

Ainsi, puisque $\mathfrak{m}(f_0) = 1$, il existe un réel P_F tel que $a_t = e^{tP_F}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons de nouveau utiliser le fait que $\mathfrak{m}$ est un point fixe de $\widehat{\Phi}_T$: pour tout $f \in C_c(\mathscr{W}^{cu})$, nous avons pour tout réel T :

$$\mathfrak{m}(f \circ \varphi_T) = \widehat{\Phi}_T \mathfrak{m}(f \circ \varphi_T) = \frac{\mathfrak{m}(k_T^F f)}{\mathfrak{m}(k_T^F f_0 \circ \varphi_{-T})} = e^{-TP_F}\mathfrak{m}(k_T^F f).$$

□

3.3 – Structure de produit local des états de Gibbs

Mesures sur les variétés invariantes. Les feuilles centre-instables, munies de la structure Riemannienne induite, sont des espaces métriques localement compacts et, lorsqu'on la restreint à l'ensemble des fonctions continues à support compact d'une feuille centre instable quelconque, $\mathfrak{m}$ est une fonctionnelle positive (voir le lemme 2.3.4). Ainsi, nous pouvons appliquer le théorème de représentation de Riesz (voir l'énoncé du théorème 2.14 de [Ru]), pour trouver une famille de mesures Boréliennes $(\lambda_{F,p}^{cu})_{p\in B}$ sur les variétés centre instables vérifiant :

1. pour tous p, q sur la même variété centre-instable, $\lambda_{F,p}^{cu} = \lambda_{F,q}^{cu}$;
2. pour tout $p \in B$, p' sur la même variété stable, et q dans le domaine d'une transformation d'holonomie $\mathrm{hol}^s_{p'\to p}$:

$$\frac{d[\mathrm{hol}^s_{p'\to p} * \lambda_{F,p}^{cu}]}{d\lambda_{F,p'}^{cu}}(q) = k^s(q, \mathrm{hol}^s_{p'\to p}(q)) = \exp\left[\int_0^\infty (F \circ \varphi_t(\mathrm{hol}^s_{p'\to p}(q)) - F\circ\varphi_t(q))dt\right];$$

3. pour tout $p \in B$ et $T \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{d[\varphi_T * \lambda_{F,\varphi_{-T}(p)}^{cu}]}{d\lambda_{F,p}^{cu}}(p) = \exp\left[\int_0^T (F\circ\varphi_{-t}(p) - P_F)dt\right].$$

Pour prouver les deuxième et troisième propriétés, il s'agit d'appliquer les propositions 2.3.8 et 2.3.9.

Enfin, la partition de toute variété centre-instable par les variétés instables est une partition mesurable, l'ensemble des feuilles étant idéntifié avec un cercle ou une droite. Les mesures $\lambda_{F,p}^{cu}$ peuvent ainsi être désintégrées dans les variétés instables, obtenant ainsi une famille de mesures $(\lambda_{F,p}^{u})_{p\in B}$, quasi-invariantes par l'action du flot, avec la relation de cocycle désirée :

$$\frac{d[\varphi_T * \lambda_{F,\varphi_{-T}(p)}^{u}]}{d\lambda_{F,p}^{u}}(p) = \exp\left[\int_0^T (F\circ\varphi_{-t}(p) - P_F)dt\right].$$

Nous pouvons de même prouver l'existence de familles de mesures $(\lambda_{F,p}^{cs})_{p\in M}$ vérifiant :

1. pour tous p, q sur la même variété centre-stable, $\lambda^{cs}_{F,p} = \lambda^{cs}_{F,q}$;
2. pour tous $p \in B$, p' sur la même variété instable, et q dans le domaine d'une transformation d'holonomie $\mathrm{hol}^u_{p'\to p}$:

$$\frac{d[\mathrm{hol}^u_{p'\to p} * \lambda^{cs}_{F,p}]}{d\lambda^{cs}_{F,p'}}(q) = k^u(q, \mathrm{hol}^u_{p'\to p}(q)) = \exp\left[\int_0^\infty (F\circ\varphi_{-t}(\mathrm{hol}^u_{p'\to p}(q)) - F\circ\varphi_{-t}(q))dt\right];$$

3. il existe un nombre réel P'_F tel que pour tout $p \in B$ et $T \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{d[\varphi_T * \lambda^{cs}_{F,\varphi_{-T}(p)}]}{d\lambda^{cs}_{F,p}}(p) = \exp\left[-\int_0^T (F\circ\varphi_{-t}(p) - P'_F)dt\right].$$

Et nous pouvons désintégrer cette famille dans les variétés stables, obtenant ainsi une famille de mesures $(\lambda^s_{F,p})_{p\in M}$, sur les variétés stables, vérifiant la relation de cocycle désirée :

$$\frac{d[\varphi_T * \lambda^{s}_{F,\varphi_{-T}(p)}]}{d\lambda^{s}_{F,p}}(p) = \exp\left[-\int_0^T (F\circ\varphi_{-t}(p) - P'_F)dt\right].$$

Structure de produit local. Nous allons montrer comment récupérer la structure de produit local de l'unique état de Gibbs associé à F. Tout d'abord, nous devons montrer que la famille de mesures $(\lambda^u_{F,p})_{p\in B}$ varie continûment avec p. Pour cela, en composant les relations d'absolue continuité de la famille $(\lambda^{cu}_{F,p})_{p\in B}$ par holonomie instable et par le flot, on trouve que la famille $(\lambda^u_{F,p})_{p\in B}$ est absolument continue par les transformations d'holonomie centre-stable avec des Jacobiens continus : cette famille varie donc continûment.

Lemme 2.3.10. *Il existe une mesure de probabilités μ_F sur B qui en restriction à tout petit ouvert ayant la structure de produit local, est obtenue en intégrant contre λ^{cs}_{F,p_0} les mesures $\psi^u_{F,p}\lambda^u_{F,p}$, où, pour tout $q \in W^u_{loc}(p)$, nous avons défini :*

$$\psi^u_{F,p}(q) = k^u_F(p,q) = \exp\left[\int_0^\infty (F\circ\varphi_{-t}(q) - F\circ\varphi_{-t}(p))dt\right]$$

Preuve. Ces mesures sur les ouverts possédant la structure de produit local sont bien définies car $\lambda^u_{F,p}$ varie continûment avec $p \in B$. Ce sont des mesures finies car les mesures $\lambda^u_{F,p}$ et $\lambda^{cs}_{F,p}$ sont finies sur les compacts.

Il s'agit de prouver que les mesures définies comme dans le lemme peuvent être recollées de façon cohérente avec l'holonomie du feuilletage stable. Ceci est une conséquence triviale de la relation d'absolue continuité par rapport à $(\lambda^{cs}_{F,p})_{p\in B}$ vérifiée par les transformations d'holonomie instable. Nous avons, lorsque p et p' sont sur la même variété instable :

$$\frac{\psi^u_{F,p'}}{\psi^u_{F,p}} = k^u(p',p) = \frac{d[\mathrm{hol}^u_{p\to p'} * \lambda^{cs}_{F,p}]}{d\lambda^{cs}_{F,p'}}(p').$$

La variété B étant compacte, nous pouvons la recouvrir par un nombre fini d'ouverts possédant la structure de produit local, de sorte que nous obtenions, en recollant les mesures définies précédemment, une mesure finie sur B : nous pouvons supposer sans restriction que c'est une mesure de probabilité. □

Lemme 2.3.11. *Nous avons $P_F = P'_F$ et μ_F est invariante par le flot.*

Preuve. En regardant comment φ_t agit sur les familles de mesures $(\lambda^u_{F,p})_{p\in B}$ et $(\lambda^{cs}_{F,p})_{p\in B}$, nous pouvons facilement obtenir pour tout réel t et tout Borélien $A\subset B$:

$$\mu_F(\varphi_t(A)) = e^{t(P_F - P'_F)}\mu_F(A),$$

ce dont nous déduisons, en l'appliquant à $A = B$, que $P_F = P'_F$. L'invariance par le flot suit alors. □

Nous allons prouver que μ_F est l'état de Gibbs associé au potentiel F et que le nombre P_F est la pression. La fin du raisonnement est assez classique : nous renvoyons par exemple à [BR] pour le lemme suivant dans le cas des états de u-Gibbs, c'est-à-dire où les mesures $\lambda^u_{F,p}$ sont données par le volume dans les variétés instables.

Rappelons la définition des boules de Bowen. Lorsque $\varepsilon > 0$ et $T > 0$, nous pouvons définir une distance d_T par la formule :

$$d_T(p,q) = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} \operatorname{dist}(\varphi_t(p),\varphi_t(q)).$$

La *boule de Bowen* pour T centrée en p et de rayon ε est la boule $B_T(p,\varepsilon)$ de centre p et de rayon ε associée à la distance d_T.

Posons, pour $p\in B$ et $\varepsilon>0$ assez petit, $D(p,\varepsilon) = [W^u_\varepsilon(p), W^{cs}_\varepsilon(p)]$. Nous posons également $D_T(p,\varepsilon) = [W^u_{T,\varepsilon}(p), W^{cs}_{T,\varepsilon}]$, où $W^\star_{T,\varepsilon}(p)$ est la composante connexe de $W^\star(p)\cap B_T(p,\varepsilon)$ qui contient p, et $\star = cs, u$. Il existe une constante $c > 1$ telle que l'on ait pour tout $p\in B$ et $\varepsilon > 0$ assez petit (voir par exemple [BR]) :

$$D_T(p, c^{-1}\varepsilon)\cap B_T(p,\varepsilon) \le D_T(p, c\varepsilon).$$

Lemme 2.3.12. *Il existe une constante $C > 1$ telle que pour tout $T > 0$, tout $p\in B$ et tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, nous ayons :*

$$C^{-1}\mu_F(B(p,\varepsilon)) \le \frac{\mu_F(B_T(p,\varepsilon))}{\exp\left[\int_0^T (F\circ\varphi_t(p) - P_F)dt\right]} \le C\mu_F(B(p,\varepsilon))$$

Preuve. Par la remarque précédente, il suffit en fait d'encadrer uniformément le rapport :

$$\frac{\mu_F(D_T(p,\varepsilon))}{\exp\left[\int_0^T (F\circ\varphi_t(p) - P_F)dt\right]}.$$

Pour ce faire, nous remarquons que $W^u_{T,\varepsilon}(p) = \varphi_{-T}(W^u_\varepsilon(\varphi_T(p)))$, et que $W^{cs}_{T,\varepsilon}(p) = W^{cs}_\varepsilon(p)$. Il existe un nombre ε_q variant continûment avec $q\in W^{cs}_\varepsilon(p)$ tel que $\varepsilon_p = \varepsilon$ et $D_T(p,\varepsilon) = \bigcup_{q\in W^{cs}_\varepsilon(p)} W^u_{T,\varepsilon_q}(q)$. Ainsi, nous pouvons utiliser un changement de variables et écrire :

$$\begin{aligned}
\mu_F(D_T(p,\varepsilon)) &= \int_{W^{cs}_\varepsilon(p)}\left(\int_{W^u_{T,\varepsilon_q}(q)} \psi^u_{F,q}\, d\lambda^u_{F,q}\right) d\lambda^{cs}_{F,p}(q)\\
&= \int_{W^{cs}_\varepsilon(p)}\left(\int_{W^u_{\varepsilon_q}(\varphi_T(q))} (\psi^u_{F,q}\circ\varphi_{-T})\, k^F_T\, e^{-TP_F}\, d\lambda^u_{F,\varphi_T(q)}\right) d\lambda^{cs}_{F,p}(q).
\end{aligned}$$

En utilisant l'uniforme continuité des quantités que nous intégrons, et en sachant que $\mu_F(B(p,\varepsilon))$ et $\mu_F(D(p,\varepsilon))$ sont uniformément du même ordre, nous trouvons que $\mu_F(D_T(p,\varepsilon))$ est en rapport borné avec :

$$\mu_F(B(p,\varepsilon))k^F_T(\varphi_T(p))e^{-TP_F} = \mu_F(B(p,\varepsilon))\exp\left[\int_0^T (F\circ\varphi_t(p) - P_F)dt\right],$$

concluant ainsi la preuve du lemme. □

Nous rappelons que deux points p et q sont dits (T,ε)-séparés si $d_T(p,q) \geq \varepsilon$, et que la pression du potentiel Hölder F pour le flot φ_t est donné par :

$$P(F) = \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \log \mathrm{Sup}\left\{ \sum_{p\in E} \exp\left[\int_0^T F\circ\varphi_t(p)dt\right] ; E\ (T,\varepsilon)\text{-séparé}\right\}.$$

Lemme 2.3.13. *Le nombre P_F est alors la pression du potentiel F pour le flot φ_t.*

Preuve. Soit E un ensemble (T,ε)-séparé maximal, de sorte que $B = \bigcup_{p\in E} B_T(p,\varepsilon)$. Nous avons alors par le lemme 2.3.12 :

$$1 \leq \sum_{p\in E} \mu_F(B_T(p,\varepsilon)) \leq C\mu_F(B(p,\varepsilon)) \sum_{p\in E} \exp\left[\int_0^T (F\circ\varphi_t - P_F)dt\right],$$

ce dont nous déduisons $P_F \leq P(F)$.

D'autre part, puisque E est maximal, les boules de Bowen $B_T(p,\varepsilon/2)$ sont deux à deux disjointes, de sorte qu'une nouvelle application du lemme 2.3.12 nous donne :

$$1 \geq \sum_{p\in E} \mu_F(B_T(p,\varepsilon/2)) \geq C^{-1}\mu_F(B(p,\varepsilon/2)) \sum_{p\in E} \exp\left[\int_0^T (F\circ\varphi_t - P_F)dt\right],$$

ce dont nous déduisons $P_F \geq P(F)$: P_F est donc bien la pression du potentiel. □

Theorème 2.3.14. *La mesure μ_F construite précédemment est un état de Gibbs ergodique associé au potentiel F.*

Preuve. Le nombre P_F est la pression de F. En appliquant de nouveau le lemme 2.3.12, ainsi que le théorème de Birkhoff, nous trouvons :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \underline{\lim_{T\to\infty}} \frac{-\log\mu_F(B_T(p,\varepsilon))}{T} = \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{-\log\mu_F(B_T(p,\varepsilon))}{T} = P(F) - \int_B F\,d\mu_F.$$

Les deux limites sont donc égales : par un théorème de brin-Katok, la limite commune est l'entropie mesurée h_{μ_F} : c'est donc que μ_F est solution du principe variationnel de Walters 2.1.5. Nous pouvons donc conclure la preuve du théorème. □

Chapitre III

Discrétisation des mesures harmoniques

1 | Discrétisation du mouvement Brownien

1.1 – Ensembles $*$-récurrents

Dans la suite, nous considérons une variété Riemannienne L complète, connexe et à géométrie bornée. Nous pouvons alors considérer pour tout $x \in L$ la mesure de Wiener W_x définie sur l'ensemble Ω_x des chemins continus commençant en x. Nous avons montré comment balayer une masse de Dirac sur une partie récurrente pour le mouvement Brownien, et comment en déduire la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques. Ci-dessous, nous expliquons la construction classique de discrétisation du mouvement Brownien de Furstenberg-Lyons-Sullivan. Le matériel peut être trouvé dans les références [BaL, Fu2, K3, LS].

Données de Lyons-Sullivan. Nous reprenons ici la terminologie de [BaL]. Pour une partie fermée $F \subset L$, nous avons défini le balayage d'une masse de Dirac δ_x comme la distribution d'entrée dans F des chemins Browniens partant de x, et nous l'avons noté β_x^F.

Pour un ouvert $V \subset L$, il est possible de considérer la distribution de sortie de V, c'est-à-dire la mesure $\varepsilon_x^V = \beta_x^{^cV}$. Lorsque $x \in {}^cV$, on obtient la masse de Dirac en x, et lorsque $x \in V$, on obtient une mesure supportée sur ∂V que l'on appelle classiquement la *mesure harmonique* de x.

Définition 3.1.1. *Soit X une partie discrète de L. Une donnée de Lyons-Sullivan pour X est une famille $(F_x, V_x)_{x \in X}$ où les F_x sont des parties fermées de L, et où les V_x sont des parties ouvertes et relativement compactes de L telles que :*

1. *pour tout $x \in X$, $x \in \operatorname{Int} F_x$, et $F_x \subset V_x$;*
2. *pour $x \neq y \in X$, $F_x \cap V_y = \emptyset$;*
3. *$F = \bigcup_{x \in X} F_x$ est récurrent ;*
4. *la donnée vérifie le principe de Harnack, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 1$ telle que pour tout $x \in X$ et $y \in F_x$, on ait :*
$$\frac{1}{C} \leq \frac{d\varepsilon_y^{V_x}}{d\varepsilon_x^{V_x}} \leq C. \tag{3.1.1}$$

Une partie discrète admettant une donnée de Lyons-Sullivan est appelée $*$-récurrente.

Dans leur étude de la compactification de Martin, Ballmann et Ledrappier [BaL] ont précisé cette notion de donnée de Lyons-Sullivan, en demandant une condition supplémentaire.

Définition 3.1.2. *Soit X une partie discrète de L. Nous disons que (F_x, V_x) est une donnée de Lyons-Sullivan si elle satisfait aux quatre conditions imposées par la définition précédente, et si de plus il existe une constante D telle que pour tout $x \in X$ et tout $y \in \partial F_x$, on ait :*

$$G_{V_x}(y, x) = D,$$

où G_{V_x} représente la fonction de Green de V_x.

Ballmann et Ledrappier prouvent alors le théorème suivant (sous une forme légèrement plus générale) :

Theorème 3.1.3. *Soit L une variété Riemannienne complète et à géométrie bornée. Soit X une partie discrète de L dont le ε-voisinage est récurrent pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors X admet une donnée de Lyons-Sullivan équilibrée $(F_x, V_x)_{x \in X}$ telle que toute isométrie de L qui laisse X invariant permute la famille $(F_x, V_x)_{x \in X}$.*

Exemple 1. Supposons que B soit une variété Riemannienne de volume fini et à géométrie bornée, et soit $\Pi : L \to B$ un revêtement Riemannien. Pour $p_0 \in B$, l'ensemble $X = \Pi^{-1}(p_0)$ admet alors une donnée de Lyons-Sullivan équilibrée.

Par le théorème de Ballmann-Ledrappier 3.1.3, il suffit de prouver que le ε-voisinage de X, noté $N_\varepsilon(X)$ est récurrent. L'argument est classique mais court et élégant : nous le rappelons. La fonction

$$P(x) = W_x[\,\omega \text{ rencontre } N_\varepsilon(X)\,]$$

est harmonique et invariante par l'action d'une copie de $\pi_1(B)$ dans les isométries directes de L : elle passe au quotient, et elle vaut 1 en p_0. On conclut alors en utilisant le fait classique que toute fonction harmonique sur une variété de volume fini et à géométrie bornée est constante. En particulier $P(x) = 1$ pour tout x.

Pour voir cela, il y a beaucoup de moyens différents. Nous esquissons un joli argument qui utilise le théorème de récurrence de Poincaré. Une fonction harmonique $h : B \to \mathbb{R}$ vérifie $\operatorname{div}\operatorname{grad} h = 0$, c'est donc que le champ de gradient de h préserve le volume. Puisque la géométrie de B est bornée, le champ de gradient est complet. Puisque ce champ préserve le volume, presque tout point de B est récurrent. Or la dynamique des lignes du champ de gradient est simple : les points vont de singularité en singularité. C'est donc que presque tout point est une singularité : le gradient d'annule presque partout. Il s'annule donc partout, et la fonction est constante.

Exemple 2. Supposons que L soit une variété Riemannienne complète et à géométrie bornée, et soit X une partie discrète et r-dense, où r est inférieur, par exemple, à la moitié du rayon d'injectivité minimal de L. Alors X admet une donnée de Lyons-Sullivan équilibrée.

Ici encore il suffit de prouver que $N_{r/2}(X)$ est récurrent. On peut ici se ramener à un problème local. Tout point de L est dans une boule centrée en un point $x \in X$ et de rayon r. Il suffit donc de minorer indépendamment du point $y \in L$ (nous avons alors $y \in B(x,r)$ pour un certain $x \in X$) la probabilité qu'un chemin Brownien commençant en y rencontre $B(x,r/2)$ avant de sortir de $B(x,r)$.

Pour ce faire, nous pouvons utiliser un résultat de comparaison de Debiard-Gaveau-Mazet, qui dit que cette probabilité est toujours minorée par la probabilité équivalente calculée dans l'espace à courbure sectionnelle constante minorant celle de L : (voir le lemme 1 de [DGM]). Cette dernière est positive et indépendante du centre des boules, puisqu'en courbure constante, le noyau de la chaleur $p(x,y;t)$ ne dépend que de t et de la distance $\operatorname{dist}(x,y)$. Nous avons donc un minorant uniforme, et nous pouvons conclure.

1.2 – Discrétisation de Furstenberg-Lyons-Sullivan

Nous nous intéressons ici au lien entre la théore du potentiel venant de l'étude du Laplacien, et celle venant de l'étude des chaînes de Markov sur des ensembles discrets. Dans le cas des réseaux discrets de $SL_2(\mathbb{R})$, Furstenberg [Fu2] a donné une première version du théorème de discrétisation, qui a été ensuite systématisé par Lyons et Sullivan [LS] : c'est leur version que nous donnons.

Avant d'énoncer le théorème, nous aurons besoin de deux notations.

- Nous noterons $\mathcal{H}^+(L,\Delta)$ l'ensemble des fonctions harmoniques pour le Laplacien qui sont positives sur L.
- Lorsque $(\mu_x)_{x\in X}$ est une famille de mesures de probabilité sur X, nous disons qu'une fonction $h : X \to [0,\infty)$ est $(\mu_x)_{x\in X}$-harmonique si pour tout $y \in X$, $h(y) = \sum_{x\in X} \mu_y(x) h(x)$. Nous noterons $\mathcal{H}^+(X,(\mu_x)_{x\in X})$ l'ensembles de ces fonctions.

Theorème 3.1.4. *Soit L une variété Riemannienne complète et à géométrie bornée, et X une partie discrète de L qui est $*$-récurrente. Il existe une famille de mesures de probabilité sur X $(\mu_z)_{z\in L}$ telle que :*

1. *chaque μ_z a un support plein : pour tout $z \in L$ et $x \in X$, $\mu_z(x) > 0$;*
2. *pour toute isométrie $\gamma \in \mathrm{Isom}(L)$ laissant X et la donnée de Lyons-Sullivan invariants, on a pour tout $z \in L$ et $x \in X$, $\mu_{\gamma z}(\gamma x) = \mu_z(x)$;*
3. *pour toute fonction $h \in \mathscr{H}^+(X, (\mu_x)_{x\in X})$, la formule $\Phi h(z) = \sum_{x\in X} \mu_z(x)h(x)$ définit une fonction lisse et harmonique de $z \in L$;*
4. *l'application $\Phi : \mathscr{H}^+(X, (\mu_x)_{x\in X}) \to \mathscr{H}^+(L, \Delta)$ est une bijection, l'application inverse étant tout simplement donnée par la restriction.*

Ballmann et Ledrappier ont complété ce théorème en donnant deux résultats que nous utiliserons également.

Theorème 3.1.5. *Soit L une variété Riemannienne complète et à géométrie bornée, et X une partie discrète de L qui est $*$-récurrente. Supposons de plus que X admette une donnée de Lyons-Sullivan équilibrée. Alors la famille de mesures donnée par le théorème précédent peut être choisie symétrique. C'est-à-dire que pour tout $x, y \in X$, $\mu_x(y) = \mu_y(x)$.*

Theorème 3.1.6. *Soit N une variété complète, connexe et simplement connexe dont la courbure est pincée entre deux constantes négatives $-b^2 \le -a^2 < 0$. Soit $\Gamma < \mathrm{Isom}^+(N)$ un sous-groupe discret de covolume fini, et $X = \Gamma o$, où o est un point fixé. Alors la mesure donnée par le théorème 3.1.5 peut être choisie de premier moment fini, c'est-à-dire que :*

$$\sum_{\gamma} \mu_o(\gamma o)\mathrm{dist}(o, \gamma o) < \infty.$$

2 | Discrétisation des mesures harmoniques pour les fibrés feuilletés

Les résultats présentés ici ont fait l'objet d'une publication d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (voir [Al])

2.1 – Mesures harmoniques et mesures stationnaires

Mesures stationnaires. Soit Γ un groupe agissant sur un espace topologique V, et μ une mesure de probabilité sur Γ. Nous disons qu'une mesure ν sur V est *μ-stationnaire* si on a :

$$\nu = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\gamma)\gamma * \nu.$$

En appliquant un argument à la Krylov-Bogolubov à l'opérateur $P\nu = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\gamma)\gamma * \nu$, il vient que lorsque V est compact, et μ est n'importe quelle mesure de probabilité sur Γ, il existe toujours une mesure μ-stationnaire.

Mesures conditionnelles des mesures harmoniques. Supposons à présent que l'on ait une variété Riemannienne B qui est de classe C^∞ de volume fini, et de géométrie bornée, et notons N son revêtement universel. Supposons que le groupe fondamental $\pi_1(B)$ agisse par difféomorphismes sur une variété différentiable compacte (la différentiabilité de V ne joue aucun rôle : nous pourrions prendre une variété topologique compacte quelconque). Nous avons alors une représentation :

$$\rho : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(V).$$

Nous avons rencontré le processus de *suspension* qui permet d'associer à cette représentation un fibré feuilleté $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ dont ρ est la représentation d'holonomie. Il est alors possible de paramétrer les feuilles de $\mathscr{F}$ par la structure Riemannienne de B, de sorte que la fibration $\Pi : M \to B$ soit un revêtement Riemannien.

Nous avons vu qu'une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$ est une mesure de probabilité m sur M qui s'annule sur tous les laplaciens feuilletés :

$$\int_M \Delta^{\mathscr{F}} h \, dm = 0,$$

pour toute fonction $h \in C^{0,2}(\mathscr{F})$. Nous rappelons que dans le cas où B est compacte, l'existence de mesures harmoniques vient d'un théorème de Garnett (voir le théorème 1.6.4). Dans le cas du volume fini, elle découle du théorème ci-dessous ainsi que de l'existence de mesures stationnaires sur tout espace compact.

Puisqu'en restriction aux feuilles, la fibration est une isométrie locale, la projection $\Pi * m$ s'annule encore sur tous les Laplaciens : elle a une densité harmonique par rapport à Lebesgue. Puisque les fonctions harmoniques sur B, qui est de volume fini et à géométrie bornée, sont les constantes, cette projection est la mesure de Lebesgue. Nous pouvons ainsi considérer la désintégration de m dans les fibres de Π : notons $(m_p)_{p\in B}$ la famille des mesures conditionnelles.

Nous pouvons alors regarder l'action du groupe d'holonomie sur ces mesures conditionnelles, et nous demander si, par analogie avec la discrétisation des fonctions harmoniques, il est possible de prouver que celles-ci sont stationnaires pour une certaine mesure de probabilité sur $\pi_1(B)$. Le théorème suivant donne une réponse positive à cette question.

Theorème 3.2.1. *Soit B une variété Riemannienne de classe C^∞, de volume fini et à géométrie bornée. Alors il existe une mesure de probabilité μ sur $\pi_1(B)$ de support total, telle que pour toute variété compacte V et toute représentation $\rho : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(V)$, il y ait une correspondance bijective entre les mesures harmoniques pour le feuilletage suspension paramétré par la métrique de la base, et les mesures μ-stationnaires sur V pour l'action définie par ρ.*

Remarque. La mesure sur le groupe fondamental de B est donnée par le théorème de discrétisation 3.1.4, et la correspondance bijective est donnée par l'application $m \mapsto m_{p_0}$ où $p_0 \in B$ est un point fixé. Nous décrirons la réciproque dans la preuve du théorème.

2.2 – Les mesures conditionnelles sont stationnaires

Dans la suite, nous considérons une variété Riemannienne B de volume fini et à géométrie bornée, ainsi qu'une représentation $\rho : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(V)$, où V est une variété différentiable. En suspendant la représentation, nous obtenons un fibré feuilleté $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ dont l'holonomie est donnée par ρ. Nous remontons la métrique de la base aux feuilles via la fibration. Nous supposons qu'il existe une mesure harmonique m pour $\mathscr{F}$ (nous rappelons que l'existence est automatique si B est compacte, sinon, nous avons besoin de la seconde moitié de la preuve du théorème pour l'établir). Nous notons N le revêtement universel Riemannien de B, et fixons une fois pour toutes un point $p_0 \in B$, ainsi qu'un relevé $o \in N$.

Extension harmonique des densités locales. Nous pouvons considérer un recouvrement localement fini de B par des petits disques trivialisants $(U_i)_{i\in I}$ de telle sorte que $\Pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times V$, et que les fonctions de transition lorsque $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, soient de la forme $(p,t) \in (U_i \cap U_j) \times V \mapsto (p, \tau_{ij}(t)) \in (U_i \cap U_j) \times V$, τ_{ij} étant la transformation d'holonomie correspondante. Nous choisissons les cartes de diamètre suffisamment petit pour que tous les U_i trivialisent le revêtement universel (la base est à géométrie bornée : nous pouvons aussi demander un diamètre uniforme pour les U_i).

Nous rappelons brièvement nos notations : lorsque c est un chemin sur la base, il est possible, en composant les fonctions de transition, de définir la transformation d'holonomie τ_c, et celle-ci ne dépend que de la classe d'homotopie de c. Notons que lorsque $\gamma \in \pi_1(B)$, la transformation d'holonomie correspondante est $\tau_\gamma = \rho(\gamma)^{-1}$. Dans la suite, nous utiliserons la notation abusive $\Pi^{-1}(U_i) = U_i \times V$.

Souvenons-nous que dans une carte $U_i \times V$, par un théorème de Garnett, m se désintègre de la façon suivante :

$$m_{|U_i \times V} = h_i(p,t)\mathrm{Leb}(p)\,\nu_i(t). \tag{3.2.2}$$

où h_i est une fonction mesurable et harmonique en p, et où ν_i est une mesure sur V. De ceci, nous déduisons d'une part, que les mesures conditionnelles sont de la forme $m_p = h_i(p,t)\nu_i(t)$, lorsque $\in U_i$, et d'autre part que par conséquent la famille des mesures conditionnelles est en réalité une famille variant continûment avec p.

Notons que lorsque c est un chemin tracé sur B, avec $c(0) = p \in U_i$ on a alors :

$$\tau_c * m_p = h_i(z, \tau_c^{-1}(t))\,\tau_c * \nu_i(t).$$

En particulier, si $\gamma \in \pi_1(B,p)$, $\rho(\gamma) * m_p = h_i(z, \rho(\gamma)^{-1}p)\,\rho(\gamma) * \nu_i(t)$. Pour alléger la notation, nous noterons $\gamma * m_p$ pour $\rho(\gamma) * m_p$.

Nous avons déjà vu qu'alors la famille $(\nu_i)_{i\in I}$ est quasi-invariante par les transformations d'holonomie, de sorte qu'il existe un Borélien mesurable $A \subset V$ tel que A soit plein pour tout ν_i, $i \in I$, et $h_i(p,.)$ soit définie sur A et ce pour tout $p \in U_i$. La relation de cocycle que nous obtenons alors est :

$$\frac{h_i(p,t)}{h_j(p,\tau_{ij}(t))} = \frac{d[(\tau_{ij}^{-1}) * \nu_j]}{d\nu_i}(t). \tag{3.2.3}$$

et ce pour tout $p \in U_i \cap U_j$ (lorsque cette intersection est non vide), et tout $t \in A$.

Soit $i_0 \in I$. Nous avons choisi une carte U_{i_0} qui trivialise le fibré, de sorte que toutes les plaques $U_{i_0} \times \{t\}$ aient une section dans N, notée $\widetilde{U}_{i_0}$, qui de plus contient o. Le lemme suivant, que nous avons déjà rencontré sous une forme légèrement différente, et que nous rencontrerons souvent après, nous dit qu'il est possible de relever $h_{i_0}(.,t)$ à $\widetilde{U}_{i_0}$, obtenant ainsi une fonction harmonique $H_t : \widetilde{U}_{i_0} \to \mathbb{R}$, et de l'étendre harmoniquement à tout N grâce à l'holonomie.

Lemme 3.2.2. *Pour tout $t \in A$, la fonction H_t peut être étendue harmoniquement à N par la formule suivante. Si $z \in N$ et c est la projection sur B du segment géodésique $[o,z]$, et si $p \in U_i$ est le point d'arrivée de c, alors on pose :*

$$H_t(z) = \frac{d[(\tau_c^{-1}) * \nu_i]}{d\nu_{i_0}}(t)\,h_i(p, \tau_c(t)). \tag{3.2.4}$$

Preuve. Cela se prouve par récurrence sur le nombre de cartes U_i rencontrées par la projection c de $[o,z]$. Si ce nombre est nul, il n'y a rien à prouver puisqu'alors la fonction H_t est harmonique dans $\widetilde{U}_{i_0}$. Pour l'hérédité, il est suffisant de remarquer que, par la relation 3.2.3 si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors la fonction $h_{ij} : z \in U_j \times \{\tau_{ij}(t)\} \mapsto h_j(z, \tau_{ij}(t)) \frac{d[(\tau_{ij}^{-1}) * \nu_j]}{d\nu_i}(t)$ est une continuation harmonique de $h_i(.,t) : U_i \times \{t\} \to \mathbb{R}$. □

Lien avec les mesures conditionnelles. Puisque B est de volume fini et à géométrie bornée, nous avons vu que l'orbite $X = \pi_1(B).o \subset N$ est $*$-récurrente (elle admet même une donnée de Lyons-Sullivan équilibrée). Nous avons donc une famille de mesures de probabilité $(\mu_z)_{z\in N}$ sur $\pi_1(B)$ (que nous avons identifié avec l'orbite $\pi_1(B).o$) vérifiant toutes les propriétés des théorèmes 3.1.4, et 3.1.5. Le but est de prouver la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *Soit $p_0 \in B$, et o un relevé au revêtement universel. Alors la mesure m_{p_0} est μ_o-stationnaire :*

$$m_{p_0} = \sum_{\gamma\in\pi_1(B)} \mu_o(\gamma)\, \gamma * m_{p_0}.$$

Pour prouver cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant, qui est une simple conséquence de la discrétisation des extensions des densités locales.

Lemme 3.2.4. *Soit $z \in N$, et considérons la projection c sur B du segment géodésique $[o,z]$. Alors pour tout $t \in A$:*

$$H_t(z) = \sum_{\gamma\in\pi_1(B)} \mu_z(\gamma) h_{i_0}(p_0, \rho(\gamma)^{-1} t) \frac{d\gamma * \nu_{i_0}}{d\nu_{i_0}}(t) \tag{3.2.5}$$

Preuve. Puisque pour tout $t \in A$, la fonction H_t est harmonique sur N, il est possible d'utiliser le théorème 3.1.4 : pour tous $t \in A$ et $z \in N$, nous avons :

$$H_t(z) = \sum_{\gamma\in\pi_1(B)} \mu_z(\gamma) H_t(\gamma o).$$

La classe d'homotopie de la projection de $[o,\gamma o]$ est bien entendu donnée par γ, et la transformation d'holonomie associée est donnée par $\tau_\gamma = \rho(\gamma)^{-1}$. Ainsi, par la relation (3.2.4), $H_t(\gamma o) = h_{i_0}(p_0, \rho(\gamma)^{-1} t) \frac{d\gamma * \nu_{i_0}}{d\nu_{i_0}}(t)$. Finalement, la relation (3.2.5) est établie. □

Nous pouvons alors prouver la proposition 3.2.3.

Preuve de la proposition 3.2.3. Puisque A est plein pour ν_{i_0}, nous pouvons multiplier la relation (3.2.5) par la mesure ν_{i_0}. Quand $z = o$, le premier terme devient $H_t(o)\nu_{i_0}$ qui est, par définition, $h_{i_0}(p_0, t)\nu_{i_0}(t)$. Mais nous avons vu que cette dernière mesure est égale à m_{p_0}.

Le membre de droite est une combinaison des mesures

$$h_{i_0}(p_0, \rho(\gamma)^{-1} t) \frac{d[\gamma * \nu_{i_0}]}{d\nu_{i_0}}(t) \nu_{i_0} = h_{i_0}(p_0, \rho(\gamma)^{-1} t)\, \gamma * \nu_{i_0}$$

pondérée par les $\mu_o(\gamma)$. Mais nous avons vu que cette mesure est égale à $\gamma * m_{p_0}$. Nous obtenons donc :

$$m_{p_0} = \sum_{\gamma\in\pi_1(B)} \mu_o(\gamma)\, \gamma * m_{p_0},$$

concluant ainsi la preuve de la proposition. □

De la même façon, en appliquant le lemme 3.2.4 à tout $z \in N$, nous trouvons :

Lemme 3.2.5. *Soit $z \in N$, et notons c la projection sur B du segment géodésique $[o,z]$, et p la projection de z sur B. Alors l'égalité suivante a lieu :*

$$m_p = \tau_c * \left(\sum_{\gamma \in \pi_1(B)} \mu_z(\gamma)\gamma * m_{p_0} \right)$$

Preuve. Considérons p,c et z comme choisis dans le lemme. Nous supposons que $z \in U_i$ pour $i \in I$. Pour tout $t \in A$, la relation (3.2.4) donne $H_t(z) = \frac{d[\tau_c^{-1} * \nu_i]}{d\nu_{i_0}}(t) h_i(p, \tau_c(t))$. Ainsi, si l'on multiplie la relation (3.2.5) par ν_{i_0}, le membre de gauche devient $h_i(p,\tau_c(t))\frac{d[\tau_c^{-1} * \nu_i]}{d\nu_{i_0}}(t)\,\nu_{i_0} = h_i(z, \tau_c(t))\,\tau_c^{-1} * \nu_i$. Mais cette dernière mesure est en fait $\tau_c^{-1} * m_z$.

D'un autre côté, le second membre est transformé exactement de la même façon que lors de la preuve de la proposition, la seule différence est que l'on obtient la combinaison des $\gamma * m_{p_0}$ pondérée par les $\mu_z(\gamma)$ et plus par les $\mu_o(\gamma)$. La relation obtenue est alors :

$$\tau_c^{-1} * m_p = \sum_{\gamma \in \pi_1(B)} \mu_z(\gamma)\gamma * m_{p_0}.$$

Nous concluons la preuve en poussant par τ_c. □

Ainsi, toutes les mesures conditionnelles de m peuvent être reconstruites à partir de celle définie dans la fibre de p_0. Nous avons ainsi le résultat suivant d'injectivité :

Corollaire 3.2.6. *Supposons les hypothèses de la proposition 3.2.3. Soit m et m' deux mesures harmoniques telles que les mesures conditionnelles m_{p_0} et m'_{p_0} coïncident. Alors les deux mesures m et m' coïncident également.*

Remarque. Quand la base est compacte, ce résultat d'injectivité est une conséquence de la décomposition ergodique des mesures harmoniques. en effet, si deux mesures m et m' sont ergodiques différentes, elles sont singulières. Les mesures qu'elles induisent sur une fibre le sont également. Par unicité de la décomposition ergodique, on en déduit que deux mesures harmoniques différentes ont des mesures conditionnelles différentes.

2.3 – Reconstruire les mesures harmoniques

Soit ν une mesure finie sur V qui est μ_o-stationnaire. Notons que cela implique en particulier que toutes les mesures $\gamma * \nu$ appartiennent à la même classe de mesures. Afin de construire une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$, nous allons construire une mesure sur chaque $\{z\} \times V$, $z \in N$, en utilisant la famille de mesures donnée par le théorème de discrétisation 3.1.4, puis les intégrer par rapport à la mesure de Lebesgue, et enfin passer au quotient. Le lemme 3.2.5 nous donne des candidats pour les familles de mesures conditionnelles. En effet, si $z \in N$, nous posons :

$$\tilde{m}_z = \sum_{\gamma \in \pi_1(B)} \mu_z(\gamma)\gamma * \nu. \qquad (\star)$$

Notons qu'en particulier, par stationnarité de ν, nous avons $\tilde{m}_o = \nu$.

Proposition 3.2.7. *Soit $\tilde{m}$ la mesure sur $M \times V$ obtenue par intégration des mesures $\tilde{m}_z$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors $\tilde{m}$ est harmonique et passe au quotient par l'action diagonale, donnant ainsi une mesure harmonique m pour le feuilletage suspension $\mathscr{F}$ sur M.*

Preuve. Prouvons d'abord la seconde partie de la proposition. Nous devons prouver que $\tilde{m}$ est invariante par l'action diagonale de $\pi_1(B)$. Premièrement, puisque $\pi_1(B)$ agit sur N par isométries, son action laisse invariante la mesure de Lebesgue. Ainsi, nous sommes amenés à prouver que les mesures conditionnelles sont préservées par l'action de $\pi_1(B)$, c'est-à-dire que nous devons prouver que l'égalité suivante a lieu quel que soit $\xi \in \pi_1(B)$,

$$\xi * \tilde{m}_p = \tilde{m}_{\xi p}. \tag{3.2.6}$$

Pour ceci, il faut remarquer la seconde propriété énoncée dans le théorème de discrétisation de 3.1.4, entraîne l'équivariance suivante : pour tout couple $\gamma, \xi \in \pi_1(B)$, et tout $z \in N$, $\mu_{\xi z}(\xi\gamma) = \mu_z(\gamma)$. Nous pouvons alors écrire pour tout $z \in N$ et $\xi \in \pi_1(B)$,

$$\xi * \tilde{m}_z = \sum_{\gamma\in\pi_1(B)} \mu_z(\gamma)\,(\xi\gamma) * \nu = \sum_{\gamma\in\pi_1(B)} \mu_{\xi z}(\xi\gamma)\,(\xi\gamma) * \nu = \sum_{\eta\in\pi_1(B)} \mu_{\xi z}(\eta)\,\eta * \nu = \tilde{m}_{\xi z}.$$

Nous devons alors prouver la première partie du lemme. Il suffit de prouver qu'en restriction à ν-presque toute tranche $N \times \{t\}$, la mesure $\tilde{m}$ a une densité harmonique par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi, soit $A \subset V$ un ensemble de Borel de mesure pleine pour ν tel que pour tous $t \in A$ et $\gamma \in \Gamma$, la dérivée $\frac{d[\gamma*\nu]}{d\nu}(t)$ existe. Dans le lemme suivant, nous introduisons une famille de fonctions harmoniques qui ne sont autres, comme nous le prouverons plus loin, que les densités des mesures conditionnelles $\tilde{m}$ dans les tranches $N \times \{t\}$ avec $t \in A$.

Lemme 3.2.8. *Pour tout $t \in A$, la fonction suivante de $z \in N$ est harmonique :*

$$H_t(z) = \sum_{\gamma\in\pi_1(B)} \mu_z(\gamma)\frac{d[\gamma*\nu]}{d\nu}(t).$$

Preuve. Remarquons d'abord que par définition, pour tous $t \in A$ et $z \in N$, nous avons : $H_t(z) = \frac{d\tilde{m}_z}{d\nu}(t)$. Puisque nous avons la relation (3.2.6) nous en déduisons que pour tout $\xi \in \pi_1(B)$, $\tilde{m}_{\xi o} = \xi * \tilde{m}_o$ et par stationnarité, $\tilde{m}_o = \nu$. Alors la relation $\tilde{m}_{\xi o} = \xi * \nu$ a lieu pour tout ξ. Ainsi, pour tous $t \in A$ et $\xi \in \Gamma$, $H_t(\xi o) = \frac{d\xi*\nu}{d\nu}(t)$, et par définition, pour tous $t \in A$ et $\gamma \in \pi_1(B)$,

$$H_t(\gamma o) = \sum_{\xi\in\pi_1(B)} \mu_{\gamma o}(\xi)\frac{d\tilde{m}_{\xi o}}{d\nu}(t) = \sum_{\xi\in\Gamma} \mu_{\gamma o}(\xi) H_t(\xi o).$$

Cela signifie que pour tout $t \in A$, la fonction $\gamma \in \pi_1(B) \mapsto H_t(\gamma o)$ est harmonique pour la famille $(\mu_{\gamma o})_{\gamma\in\pi_1(B)}$. Par le théorème de discrétisation 3.1.4, la fonction $z \mapsto H_t(z)$ est harmonique. □

Ainsi, les mesures conditionnelles de $\tilde{m}' = H_t(z)\mathrm{Leb}(z)\nu(t)$ sur les $N \times \{t\}$ ont des densités harmoniques par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous pouvons la désintégrer dans les fibres $\{z\} \times V$, les mesures conditionnelles sont alors les $\tilde{m}'_z = H_t(z)\nu(t)$, et, par construction, cette mesure est égale à $\tilde{m}_z$. Cela signifie que les deux mesures $\tilde{m}$ et $\tilde{m}'$ sont égales. Finalement $\tilde{m}$ est harmonique, et la preuve de la proposition est finie. □

Finalement, la mesure conditionnelle en p_0 de la mesure harmonique quotient est donnée par ν (c'est une mesure de probabilité). Ceci, ainsi que le corollaire 3.2.6, nous permet de finir la preuve du théorème principal en énonçant la proposition suivante :

Proposition 3.2.9. *L'application qui à une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$ associe sa mesure conditionnelle en p_0 est une bijection entre l'ensemble des mesures harmoniques pour $\mathscr{F}$ et celui des mesures sur V qui sont μ_o-stationnaires.*

3 | Unicité de la mesure harmonique pour certains fibrés feuilletés compacts

3.1 – Représentations projectives contractantes et fortement irréductibles

Nous allons ici donner une version des travaux de Guivarc'h-Raugi adaptée à notre cadre : voir [GR]. Ici encore B représente une variété Riemannienne que nous supposons de volume fini et à géométrie bornée.

Définition 3.3.1. *1. Nous disons qu'une représentation $\rho : \pi_1(B) \to PSL_d(\mathbb{C})$ est contractante si pour toute mesure de probabilité m sur $\mathbb{CP}^{d-1}$, il existe une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \pi_1(B)^{\mathbb{N}}$ telle que $\rho(\gamma_n) * m$ converge vers une masse de Dirac.*

2. Nous disons qu'une représentation $\rho : \pi_1(B) \to PSL_d(\mathbb{C})$ est fortement irréductible s'il n'y a pas de famille finie $\{V_1, ..., V_k\}$ de sous-espaces projectifs propres de $\mathbb{CP}^{d-1}$ qui soit invariante par chaque $\rho(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$.

Le théorème de Guivarc'h-Raugi peut alors s'énoncer en termes de représentations projectives sous la forme suivante.

Theorème 3.3.2 (Guivarc'h-Raugi)**.** *Supposons que μ soit une mesure de probabilité sur $\pi_1(B)$ de support total. Soit $\rho : \Gamma \to PSL_d(\mathbb{C})$ une représentation projective contractante et fortement irreductible. Supposons de plus que ρ satisfasse la condition d'intégrabilité suivante :*

$$\sum_{\gamma\in\pi_1(B)} \mu(\gamma) \log ||\rho(\gamma)|| < \infty.$$

Alors il existe une unique mesure de probabilité ν sur $\mathbb{CP}^{d-1}$ qui soit μ-stationnaire.

3.2 – Unique ergodicité dans le cas où la base est compacte courbée négativement

Nous déduisons de tout ce qui précède le théorème suivant :

Theorème 3.3.3. *Soit B une variété Riemannienne close et courbée négativement. Considérons une représentation projective $\rho : \pi_1(B) \to PSL_d(\mathbb{C})$ supposée contractante et fortement irréductible de son groupe fondamental, dont la suspension donne un fibré feuilleté noté $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^{d-1}, \mathscr{F})$. Alors il existe une unique mesure harmonique pour $\mathscr{F}$.*

Nous notons que, au moins quand $d = 2$ et B est une surface compacte, la condition d'être contractante et fortement irréductible est ouverte et dense dans la variété algébrique des représentations de $\pi_1(S)$ dans $PSL_2(\mathbb{C})$ (voir [BGVil]) : le complémentaire est en fait inclus dans une sous-variété algébrique de codimension positive. Le fait que cela soit encore vrai en toute généralité semble plus que plausible, mais nous n'en avons pas trouvé trace dans la littérature.

Nous considérons donc B une variété Riemannienne close courbée négativement : le théorème 3.1.4 associe une famille de mesures de probabilité sur $\pi_1(B)$, notée $(\mu_z)_{z\in M}$. Considérons donc une représentation projective $\rho : \Gamma = \pi_1(S) \to PSL_d(\mathbb{C})$.

Puisque B est compacte, les deux distances invariantes suivantes sur $\pi_1(B)$ sont équivalentes : $d_1(\gamma_1,\gamma_2) = \mathrm{dist}(\gamma_1 o, \gamma_2 o)$ et $d_2(\gamma_1,\gamma_2)$, la distance des mots associée à un système fini et symétrique de générateurs. Mais si $||.||$ est une norme d'opérateurs sur $SL_d(\mathbb{C})$ et si C est supérieur à tous les $\log||\rho(\gamma_i)||$ pour un système fini et symétrique de générateurs $(\gamma_i)_i$ alors pour tout γ, $\log(||\rho(\gamma)||) \leq Cd_2(Id,\gamma)$. Ainsi, on a $\log||\rho(\gamma)|| = O(\mathrm{dist}(o,\gamma o))$, et puisque par le théorème de Ballmann-Ledrappier 3.1.6, μ a un premier moment fini, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.3.4. *L'application $\gamma \mapsto \log||\rho(\gamma)||$ est μ_o-intégrable.*

Supposons à présent que l'action de $\pi_1(B)$ soit fortement irréductible et contractante, et souvenons-nous que par le théorème 3.1.4, la mesure μ_o est de support total. Par le théorème 3.3.2, il existe une unique mesure μ_o-stationnaire ν. En conséquence, par le théorème 3.2.1, nous sommes en mesure de conclure la preuve du théorème 3.3.3.

4 | Représentations paraboliques des surfaces d'aire finie

4.1 – Définitions

Surfaces d'aire finie. Soit Σ une surface Riemannienne non compacte dont :

- l'aire est finie ;
- la courbure est pincée entre deux constantes négatives $-b^2 \leq -a^2$ (nous dirons juste courbure négative pincée).

Alors, Σ est difféomorphe à $\Sigma_g \setminus \{p_1, ..., p_k\}$ où Σ_g est la surface compacte de genre g. Si $g = 0$, on a $k \geq 3$. Nous appelons *pointes* les p_i. Il est bien connu que le groupe fondamental de Σ est un groupe libre.

Représentations paraboliques. Le revêtement universel Riemannien de Σ, que l'on notera $\widetilde{\Sigma}$ est difféomorphe à un disque et peut être compactifié par l'ajonction d'un cercle à l'infini. L'action par isométrie sur $\widetilde{\Sigma}$ du groupe $\pi_1(\Sigma)$ s'étend naturellement en une action sur $\widetilde{\Sigma} \cup \Sigma(\infty)$. L'action consiste d'éléments hyperboliques, qui fixent deux points du cercle $\Sigma(\infty)$, et paraboliques, qui n'en fixent qu'un seul.

Les éléments de $\pi_1(\Sigma)$ agissant comme des isométries paraboliques sont exactement les lacets faisant le tour d'une pointe. Un tel lacet est librement homotope à un horocycle fermé.

Définition 3.4.1. *Soit Σ une surface Riemannienne non compacte, d'aire finie, et de courbure négative pincée. Une représentation $\rho : \pi_1(\Sigma) \to PSL_d(\mathbb{C})$ est dite parabolique si l'image d'un élément parabolique de $\pi_1(\Sigma)$ est une matrice parabolique de $PSL_d(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qui n'a que des valeurs propres de module 1.*

De façon équivalente, si $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^{d-1}, \mathscr{F})$ est le feuilletage obtenu par suspension de ρ, la représentation ρ est parabolique si l'holonomie au dessus de tout horocycle fermé est une matrice parabolique.

4.2 – Questions d'intégrabilité pour les représentations paraboliques

Résultats principaux. Le but de cette section est de prouver le résultat suivant.

Theorème 3.4.2. *Soit Σ une surface Riemannienne non compacte, d'aire finie, et de courbure négative. Soit $\rho : \pi_1(\Sigma) \to PSL_d(\mathbb{C})$ une représentation parabolique. Alors, on a, indépendamment du choix d'un point base $o \in \widetilde{\Sigma}$:*

$$\log ||\rho(\gamma)|| = O(\mathrm{dist}(o, \gamma o)).$$

En utilisant d'une part le théorème de Ballmann-Ledrappier 3.1.6, puis le théorème 3.3.2, nous voyons que ce théorème a pour corollaires les deux résultats suivants :

Corollaire 3.4.3. *Soit Σ une surface Riemannienne non compacte, d'aire finie, et de courbure négative pincée. Soit $\rho : \pi_1(\Sigma) \to PSL_d(\mathbb{C})$ une représentation parabolique. Soit $(\mu_z)_{z \in \widetilde{\Sigma}}$ la famille de mesures de probabilité sur $\pi_1(\Sigma)$ définie par le théorème de discrétisation 3.1.4. Alors on a, pour tout $o \in \widetilde{\Sigma}$:*

$$\sum_{\gamma \in \pi_1(\Sigma)} \mu_o(\gamma) \log ||\rho(\gamma)|| < \infty.$$

Corollaire 3.4.4. *Soit Σ une surface Riemannienne non compacte, d'aire finie, et de courbure négative pincée. Soit $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^{d-1}, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté obtenu dont la représentation d'holonomie est donnée par $\rho : \pi_1(\Sigma) \to PSL_d(\mathbb{C})$ qui est parabolique, contractante et fortement irréductible. Alors $\mathscr{F}$ possède une unique mesure harmonique.*

Excursions horocycliques. Une surface Σ Riemannienne non compacte, d'aire finie, et de courbure négative pincée se décompose ainsi : $\Sigma = K \sqcup \mathrm{Int}\, P_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Int}\, P_k$, où P_i est un horodisque centré en la pointe p_i bordée par un horocycle fermé H_i, et K est une partie compacte de Σ.

Définition 3.4.5. *Une excursion horocyclique d'un chemin c autour de la pointe p_i est une composante connexe de l'intersection $c \cap \mathrm{Int}\, P_i$.*

Géodésique sans excursion horocyclique. Dans la suite, $\rho : \pi_1(\Sigma) \to PSL_d(\mathbb{C})$ est une représentation parabolique d'une surface Σ Riemannienne non compacte, d'aire finie et de courbure négative pincée. Nous suspendons cette représentation, obtenant ainsi un fibré feuilleté $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^{d-1}, \mathscr{F})$. Rappelons que lorsque c est un chemin sur Σ, $\tau_c : V_{c(0)} \to V_{c(1)}$ est l'application d'holonomie au dessus de c, et que cette application ne dépend que de la classe d'homotopie de c.

Le lemme suivant se montre exactement comme le lemme 3.3.4, en utilisant le fait que K est compact.

Lemme 3.4.6. *Il existe un réel positif $C_1 > 0$ tel que pour tout segment géodésique c sur S sans excursion horocyclique, l'on ait :*

$$\log ||\tau_c|| \leq C_1 \mathrm{long}(c).$$

Holonomie au dessus d'une excursion horocyclique. Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. Notons H_i l'horocycle fermé qui borde l'horodisque P_i. La représentation ayant été choisie parabolique, l'holonomie au dessus du lacet H_i est une matrice parabolique A_i.

Lemme 3.4.7. *Il existe un réel positif C_2 tel que pour tout segment géodésique c inclus dans un horodisque P_i et dont les points extrémaux sont sur H_i, l'on ait :*

$$\log ||\tau_c|| \leq C_2 \log t_c$$

où t_c est la longueur de l'horocycle qui relie les extrémités du relevé de c au revêtement universel.

Preuve. Premièrement, comme indiqué dans [BGVil], il est possible, quitte à se ramener à une matrice conjuguée, et à restreindre le cocycle à un sous-espace invariant, de ne considérer que le cas où A_i est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Plus précisément, si $h : \mathbb{R}^+ \to H_i$ est un paramétrage de H_i par longueur d'arcs, on a $\tau_{h([0,t])} = \exp(tJ)$, où J est la matrice dont toutes les entrées sont nulles, sauf celles de la sur-diagonale qui valent 1. Les entrées de $\tau_{h([0,t])}$ sont des fonctions polynomiales en t, de degré $\leq d-1$.

Deuxièmement, le relevé $\tilde{c}$ de c au revêtement universel est homotope au segment horocyclique reliant ses deux extrémités. Ainsi, $\tau_c = \tau_{h([0,t_c])}$: puisque les entrées de $\tau_{h([0,t_c])}$ sont polynomiales en t_c, nous pouvons conclure la preuve du lemme. □

Comparaison des distances géodésique et horocyclique. Le théorème suivant, dû à Heintze et Im Hof, [HI], permet de comparer distances géodésique et horocyclique.

Theorème 3.4.8. *Soit N une variété Riemannienne connexe, simplement connexe, complète, dont la courbure sectionnelle est pincée entre deux constantes négatives $-b^2 \leq -a^2$. Alors, pour toute horosphère H, si* dist_H *représente la distance associée à la restriction de la métrique sur H, et si* dist *représente la distance géodésique,*

$$\frac{2}{a}\sinh\left(\frac{a}{2}\mathrm{dist}(z_1,z_2)\right) \leq \mathrm{dist}_H(z_1,z_2) \leq \frac{2}{b}\sinh\left(\frac{b}{2}\mathrm{dist}(z_1,z_2)\right),$$

pour tout couple $(z_1,z_2) \in H^2$.

Nous déduisons du théorème ci-dessus, ainsi que du lemme 3.4.7, le lemme suivant :

Lemme 3.4.9. *Il existe un réel positif C_2 tel que pour tout segment géodésique c inclus dans un horodisque P_i et dont les points extrémaux sont sur H_i, l'on ait :*

$$\log||\tau_c|| \leq C_2 \mathrm{long}(c).$$

Fin de la preuve du théorème 3.4.2. Nous pouvons à présent conclure la preuve en prouvant qu'il existe un réel positif C tel que pour tout segment géodésique c, dont nous supposons que le point de départ est dans K, on ait :

$$\log||\tau_c|| \leq C\mathrm{long}(c).$$

Nous pouvons décomposer un tel segment c, en la concaténation $c_n...c_1$ de segments géodésiques c_i vérifiant :

- c_{2p+1} n'a aucune excursion horocyclique ;
- c_{2p} est inclus dans l'un des P_i, et ses extrémités sont sur l'horocycle fermé H_i.

Nous avons $\tau_c = \tau_{c_n}...\tau_{c_1}$, et par définition, il existe un réel positif $C > 0$ tel que pour tout p, $\log||\tau_{c_{2p+1}}|| \leq C\mathrm{long}(c_{2p+1})$, et $\log||\tau_{c_{2p}}|| \leq C\mathrm{long}(c_{2p})$. Alors :

$$\log||\tau_c|| \leq \log||\tau_{c_n}|| + ... + \log||\tau_{c_1}|| \leq C(\mathrm{long}(c_n) + ... + \mathrm{long}(c_1)) = C\mathrm{long}(c),$$

la dernière égalité étant vraie car c est un segment géodésique.

A présent, choisissons un point base $p \in \Sigma$, et un relevé $o \in \tilde{\Sigma}$. Par définition, nous avons $\rho(\gamma^{-1}) = \tau_{c_\gamma}$, où c_γ est le segment géodésique obtenu en projetant $[o,\gamma o]$ sur Σ. Nous avons donc une constante positive $C > 0$ telle que pour tout $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$, $\log||\rho(\gamma^{-1})|| \leq C\mathrm{long}(c_\gamma) = C\mathrm{dist}(o,\gamma o) = C\mathrm{dist}(o,\gamma^{-1}o)$, car $\pi_1(\Sigma)$ agit par isométries sur $\tilde{\Sigma}$.

La preuve du théorème 3.4.2 est donc finie. □

5 | Discrétisation des mesures harmoniques et chaînes de Markov

Nous proposons ici une variation de notre argument dans le cadre où la base ne paramètre plus les feuilles. Il ne s'agit plus alors de considérer des compositions iid de difféomorphismes aléatoires, mais des compositions dirigées par une chaîne de Markov dont le noyau de transition dépend de la métrique dans les feuilles. Les preuves sont très proches de celles dans le cas iid, mais avec quelques variations mineures d'ordre technique. Nous présentons ce résultat parce qu'il permet de donner une application géométrique naturelle de la théorie de Guivarc'h sur les produits aléatoires de matrices dirigés par une chaîne de Markov : [Gu]. Pour avoir une description satisfaisante, il y a une hypothèse à vérifier, qui est la continuité du noyau de transition, et que nous n'avons pas établie : il faudrait prouver que les poids intervenant dans le théorème de Lyons-Sullivan peuvent être construits de tels sorte qu'ils varient continûment avec la métrique.

5.1 – Fibrés feuilletés non paramétrés par la base

Paramétrage des feuilles. Considérons une variété Riemannienne close B, une variété compacte V, ainsi qu'un fibré feuilleté $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ obtenu en suspendant une représentation $\rho : \pi_1(B) \to \mathrm{Diff}(V)$.

Nous ne paramétrons pas les feuilles de $\mathscr{F}$ par la métrique de la base, mais considérons une métrique feuilletée $L \mapsto g_L$ qui varie continûment avec le paramètre transverse.

De manière équivalente, nous avons la construction suivante. Rappelons que la variété suspension M est obtenue en prenant le quotient de $\widetilde{B} \times V$ par l'action diagonale de $\pi_1(B)$, agissant sur le premier facteur par applications de revêtement, et sur le second par transformations d'holonomie $\rho(\gamma)$.

Nous fixerons dans toute la suite un point $p_0 \in B$, ainsi qu'un relevé $o \in \widetilde{B}$. Puisque toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ sont des revêtements de B est alors possible de paramétrer le produit $\widetilde{B} \times V$ par la fibre V_{p_0} de la façon suivante :

$$\widetilde{B} \times V = \bigsqcup_{t \in V_{p_0}} \widetilde{L}_t,$$

puis de mettre une métrique Riemannienne sur chaque $\widetilde{L}_t$, variant continûment avec t, de telle sorte que :

- $\mathrm{proj}_t : (\widetilde{L}_t, o) \to (L_t, t)$ soit un revêtement Riemannien ;
- pour tous $\gamma \in \pi_1(B)$ et $t \in V_{p_0}$, l'application induite $\gamma : \widetilde{L}_t \to \widetilde{L}_{\rho(\gamma)t}$ soit une isométrie.

Mesures harmoniques. Soit m une mesure harmonique. Nous fixerons dans la suite un atlas fini $(U_i)_{i \in I}$ (nous noterons n le cardinal de I) formé de petits disques inclus dans B qui trivialisent le fibré, ainsi que le revêtement universel Riemannien de toutes les feuilles et tels que l'intersection de deux cartes U_i et U_j est soit vide, soit connexe. Nous avons vu qu'il est possible d'écrire la restriction de m à $U_i \times V$ de la façon suivante :

$$m_{|U_i \times V} = h_i(p,t) \mathrm{Leb}_{P_i(t)} \nu_i(t),$$

où h_i est une fonction mesurable qui est harmonique en la première variable, et ν_i est une mesure de probabilité sur V. Nous rappelons enfin qu'il y a alors un ensemble $A \subset V$ qui est invariant par toutes les transformations d'holonomie, et qui est de mesure pleine pour chaque ν_i sur lequel sont définies les densités $h_i(.,t)$, et telles que l'on ait les relations de cocycles, déjà vues plus haut, et que nous rappelons, pour la commodité du lecteur :

$$\frac{h_i(p,t)}{h_j(p,\tau_{ij}(t))} = \frac{d[(\tau_{ij}^{-1})*\nu_j]}{d\nu_i}(t), \tag{3.5.7}$$

pour $p \in U_i$ et $t \in A$. Pour tout $t \in A$, Nous pouvons, comme nous l'avons fait précédemment, étendre harmoniquement la densité $h_{i_0}(.,t)$ au revêtement universel (qui envoie le point o sur $(p_0,t) \in U_{i_0} \times A$) de la feuille L par l'équation suivante :

$$H_t(z) = \frac{d[\tau_c^{-1} * \nu_i]}{d\nu_{i_0}}(t)\, h_i(p,\tau_c(t)), \tag{3.5.8}$$

où $z \in \widetilde{L}_t$, c est la projection du segment géodésique $[o,z]$, et p celle de z.

Il y a une difficulté venant du fait que les feuilles ne sont pas paramétrées par la base : les volumes dans les feuilles n'ont donc plus de raison d'être tous les mêmes, et la projection sur B d'une fonction harmonique n'a plus de raison d'être encore harmonique. Il n'est plus possible de conclure que les mesures conditionnelles dans les feuilles sont exactement déterminées par les mesures $h_i(p,t)\nu_i(t)$. Néanmoins, comme nous allons le voir, elles leurs sont équivalentes, et ces dernières mesures sont canoniquement associées à la mesure harmonique. La première étape pour voir ceci est de prouver que les densités locales sont à dérivée logarithmique bornée dans toutes les plaques.

Lemme 3.5.1. *Il existe une constante $C > 1$ telle que pour tout $i \in I$, tout $t \in A$ et tout couple $p,q \in U_i$ on, ait :*

$$C^{-1} \leq \frac{h_i(q,t)}{h_i(p,t)} \leq C.$$

Preuve. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Harnack locale de Cheng-Yau, [CY]. Celle-ci entraîne en particulier, pour le revêtement universel d'une feuille $\widetilde{L}_t$, qu'il existe, pour tout $R > 0$, une constante $C_{t,R}$ ne dépendant que de R et de la borne inférieure de la courbure sectionnelle de $\widetilde{L}_t$, telle que pour toute fonction harmonique $h : \widetilde{L}_t \to \mathbb{R}$, et toute boule $B(R)$ de rayon R, on ait :

$$\operatorname*{Sup}_{B(R)} |D(\log h)| \leq C_{t,R}.$$

Comme la métrique feuilletée varie continûment avec le paramètre transverse, et comme la base B est compacte, il y a un majorant uniforme pour le diamètre des plaques, et un minorant uniforme pour la courbure sectionnelle des feuilles. Puisque toutes les densités peuvent être étendues harmoniquement au revêtement universel, il existe une constante $C > 1$ telle que :

$$\operatorname{Sup}\left\{|D_p(\log h_i(.,t))|;\ i \in I,\ t \in V,\ p \in U_i\right\} \leq \log C.$$

Le lemme suit donc. □

Lemme 3.5.2. *Il existe une fonction continue $M : B \to (0,\infty)$ telle que pour tout $i \in I$ et tout $p \in U_i$, on ait :*

$$M(p) = \int_V h_i(p,t)\, d\nu_i(t).$$

Preuve. Fixons $i \in I$ et $p_0 \in U_i$. Pour tout $p \in U_i$, la fonction $h_i(p,.)$ est intégrable contre ν_i, donc la formule écrite a bien un sens. Pour voir que la fonction est bien définie, il faut voir que si $p \in U_i \cap U_j$, on a $\int_V h_i(p,t)d\nu_i(t) = \int_V h_j(p,t)d\nu_j(t)$: mais ceci vient de façon claire de la relation de cocycle (3.5.7).

Pour voir qu'elle varie continûment, il suffit donc de montrer que c'est le cas en restriction à chaque carte U_i. Pour cela nous utilisons le fait que les densités locales sont à dérivée logarithmique uniformément bornée (voir le lemme 3.5.1), pour montrer que pour tout p et $t \in A$, $h_i(p,t) \leq Ch_i(p_0,t)$. Ainsi, puisque $h_i(p_0,.)$ est intégrable, le théorème de continuité sous l'intégrale implique que M varie de façon continue dans U_i, ce qui nous permet de conclure. □

Proposition 3.5.3. *Soit $i \in I$, $p \in U_i$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, appelons $K_{p,\varepsilon}$ l'union sur $t \in V$ des disques dans les plaques de rayon ε centrés en (p,t), et $pr_{p,\varepsilon} : K_{p,\varepsilon} \to V_p$, la projection naturelle le long des plaques de $\mathscr{F}$. Alors la mesure suivante existe :*

$$\bar{m}_p = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{pr_{p,\varepsilon} * (m_{|K_{p,\varepsilon}})}{m(K_{p,\varepsilon})},$$

où par définition, $B_t(p,\varepsilon)$ représente la boule de rayon ε pour la métrique de la plaque $P_i(t)$.

Nous avons de plus $\bar{m}_p = m_p / M(p)$, où on a défini :

$$m_p = h_i(p,t)\nu_i(t).$$

Preuve. Lorsque ε est suffisamment petit, nous pouvons écrire, lorsque $X \subset V_p$:

$$\frac{m(pr_{p,\varepsilon}^{-1}(X))}{m(K_{p,\varepsilon})} = \frac{\int_X \left(\int_{B_t(p,\varepsilon)} h_i(q,t) d\mathrm{Leb}_{P_i(t)}(q)\right) d\nu_i(t)}{\int_V \left(\int_{B_t(p,\varepsilon)} h_i(q,t) d\mathrm{Leb}_{P_i(t)}(q)\right) d\nu_i(t)}.$$

Nous savons d'une part que lorsque le rayon ε tend vers zéro, la mesure de Lebesgue d'une boule de rayon ε est équivalente à une constante universelle (le volume de la boule euclidienne unité de la dimension de la base), que multiplie ε^n. Nous pouvons d'autre part utiliser l'estimée de Cheng-Yau pour voir que lorsque $\varepsilon \to 0$, et $q \in B_t(p,\varepsilon)$, le quotient $h_i(q,t)/h_i(p,t)$ tend vers 1 uniformément. On a donc, à la limite :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m(pr_{p,\varepsilon}^{-1}(X))}{m(K_{p,\varepsilon})} = \frac{\int_X h_i(t,p)\, d\nu_i(t)}{\int_V h_i(t,p)\, d\nu_i(t)}.$$

Nous pouvons donc conclure. □

Remarque. En utilisant une fois de plus le fait que la dérivée logarithmique des densités locales est uniformément bornée, et que la métrique varie continûment avec le paramètre transverse, nous pouvons voir que la mesure $\bar{m}_p$, est équivalente à la mesure conditionnelle de m dans la fibre V_p avec une dérivée de Radon-Nikodym uniformément log-bornée. Pour voir cela, il faut utiliser le fait que ces mesures conditionnelles s'obtiennent de la même façon que m_p, à la différence qu'au lieu de considérer les ensembles $K_{p,\varepsilon}$, il nous faut utiliser les images réciproques de petites boules dans B centrées en p. Il est alors facile de voir que ces images réciproques sont emboîtées dans des $K_{p,\varepsilon}$ de taille comparable, et donc à la limite, on voit que les deux mesures sont équivalentes et que la dérivée de Radon-Nikodym est uniformément log bornée.

En utilisant le fait que la fonction M est continue, donc bornée, nous pouvons récapituler la discussion précédente en une phrase :

les mesures $m_p = h_i(p,t)\nu_i(t)$ sont bien définies intrinsèquement à partir de m et sont équivalentes à ses mesures conditionnelles avec des dérivées de Radon-Nikodym uniformément log-bornées.

5.2 – Dynamiques aléatoires dirigées par chaînes de Markov

Le noyau de transition. Rappelons que l'on a fixé une fois pour toutes un point $p_0 \in B$, ainsi qu'un point o dans le revêtement universel tel que pour tout $t \in V_{p_0}$, $\mathrm{proj}_t : (\widetilde{L}_t, o) \to (L_t, t)$ soit un revêtement Riemannien. Nous pouvons supposer que $p_0 \in U_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$.

Alors, toute feuille L rencontre V_{p_0} en un ensemble $X_L = L \cap V_{p_0}$, que nous pouvons remonter au revêtement universel Riemannien $\widetilde{L}$: nous noterons $\widetilde{X}_L$ ce relevé. Nous avons le :

Lemme 3.5.4. *Pour toute feuille L, l'ensemble $\widetilde{X}_L$ est $*$-récurrent, et possède une donnée de Lyons-Sullivan équilibrée.*

Preuve. Nous prouvons qu'il existe un réel positif C tel que pour toute feuille L, l'ensemble $\widetilde{X}_L$ soit discret et C-dense dans $\widetilde{L}$: le fait qu'il possède une donnée de Lyons-Sullivan équilibrée suit donc du théorème de Ballmann-Ledrappier 3.1.3, ainsi que de l'exemple 2 que nous avions traité après avoir énoncé ce théorème.

La première remarque que nous faisons est que le diamètre des plaques est uniformément minoré et majoré par des nombres $C_1^{\pm 1}$. En effet, c'est dû aux faits que la métrique varie continûment avec le paramètre transverse et que la fibre V est compacte. De ceci nous déduisons en particulier que la partie $\widetilde{X}_L$ est discrète.

La seconde remarque à faire est que, si l'on choisit un point $y \in M$, son projeté $p = \Pi(y)$, peut être relié à p_0 par un segment géodésique qui rencontre au plus n cartes, n étant le cardinal de l'atlas. Nous pouvons remonter ce chemin en partant de y, et appeler $x \in X$ son point d'arrivée : on peut relier y à $x \in X_L$ par une chaîne d'au plus n plaques de $\mathscr{F}$. Alors, on voit que $\mathrm{dist}_L(x, y) \leq nC_1$.

Nous pouvons à présent conclure en passant au revêtement universel. □

Notons qu'il est possible d'identifier les ensembles $\widetilde{X}_L$ avec le groupe fondamental $\pi_1(B)$. Ainsi, le théorème de Ballmann-Ledrappier 3.1.5, nous permet de construire une famille de mesures $(\mu_z^t)_{z \in \widetilde{L}_t}$ sur le groupe fondamental de $\pi_1(B)$, qui vérifie toutes les propriétés du théorème Lyons-Sullivan 3.1.4, ainsi que la propriété de symétrie suivante, valable pour tous $\eta_1, \eta_2 \in \pi_1(B)$:

$$\mu^t_{\eta_1 o}(\eta_2) = \mu^t_{\eta_2 \eta_1 o}(\eta_2^{-1}). \tag{3.5.9}$$

Le lemme suivant sera utile pour prouver les relations d'équivariance nécessaires pour construire les fonctions harmoniques à partir des mesures stationnaires.

Lemme 3.5.5. *Soit $t \in V_{p_0}$, $\eta_1, \eta_2, \gamma \in \pi_1(B)$, alors les poids suivants sont égaux :*

$$\mu^t_{\eta_1 o}(\gamma) = \mu^{\rho(\eta_2)t}_{\eta_2 \eta_1 o}(\eta_2 \gamma).$$

Preuve. La preuve de ce lemme se déduit directement du fait que l'application $\eta_2 : \widetilde{L}_t \to \widetilde{L}_{\rho(\eta_2)t}$ est une isométrie qui permute l'ensemble $*$-récurrent $X = \pi_1(B).o$, ainsi que de la seconde assertion du théorème 3.1.4. □

Nous allons alors définir un noyau de transition sur $\pi_1(B)$ par la formule suivante :

$$P(t, \gamma) = \mu^t_o(\gamma^{-1}) \quad t \in V_{p_0}, \ \gamma \in \pi_1(B).$$

Remarquons que lorsque $\gamma \in \pi_1(B)$, la somme des $P(t, \gamma')$, portant sur les γ' vérifiant $\rho(\gamma')t = \rho(\gamma)t$, s'interpète comme la *probabilité de transition*, de t à $\rho(\gamma)t$ dans V_{p_0}. Cette définition nous permet donc de construire un noyau de Markov de la façon suivante.

Définition 3.5.6. *Nous considèrerons la chaîne de Markov sur la fibre V_{p_0} définie par le noyau de transition suivant :*

$$Pf(t) = \sum_{\gamma\in\pi_1(B)} P(t,\gamma)f(\gamma t),$$

où f est une application continue sur V_{p_0}.

De façon équivalente, le noyau agit sur les mesures de probabilité sur V_{p_0} de la façon suivante :

$$P\nu = \sum_{\gamma\in\pi_1(B)} P(\rho(\gamma)^{-1}t,\gamma)\gamma * \nu.$$

Une mesure de probabilité ν sur V_{p_0} est dite P-stationnaire si $P\nu = \nu$.

Proposition 3.5.7. *La définition des actions du noyau sur les fonctions continues et sur les mesures sur V_{p_0} est cohérente, en ce que P agit de manière duale sur ces deux espaces :*

$$\int f\,d[P\nu] = \int Pf\,d\nu,$$

pour toute fonction f continue sur V_{p_0}, et pour toute mesure de probabilité ν sur V_{p_0}.

Preuve. Choisissons une fonction f continue sur V_{p_0}, ainsi qu'une mesure de probabilité ν sur V_{p_0}. Par définition de $P\nu$, l'intégrale de f contre $P\nu$ est la somme sur γ des intégrales suivantes :

$$I_\gamma(f) = \int P(\rho(\gamma)^{-1}t,\gamma)f(t)\,d[\gamma*\nu](t) = \int P(t,\gamma)f(\gamma t)\,d\nu(t).$$

Une interversion somme-intégrale, immédiate puisque f est bornée (car continue sur un compact) et puisque $(P(t,\gamma))_{\gamma\in\pi_1(B)}$ est sommable de somme 1 pour tout t, nous permet de conclure que :

$$\sum_{\gamma\in\pi_1(B)} I_\gamma(f) = \int\left(\sum_{\gamma\in\pi_1(B)} P(t,\gamma)f(\gamma t)\right)d\nu(t).$$

Cette égalité est exactement celle écrite dans l'énoncé de la proposition. □

Le lemme suivant traduit la relation de symétrie (3.5.9) en termes de probabilités de transition :

Lemme 3.5.8. *Pour tout $t\in V_{p_0}$, et $\gamma\in\pi_1(B)$, on a :*

$$P(t,\gamma) = P(\rho(\gamma)t,\gamma^{-1}).$$

5.3 – Mesures harmoniques et mesures P-stationnaires

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant :

Theorème 3.5.9. *Soit $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté, muni d'un métrique feuilletée variant continûment avec le paramètre transverse. Fixons $p_0\in B$. Alors l'application qui à une mesure harmonique m associe la mesure m_{p_0} définie dans la proposition 3.5.3 est une bijection entre :*

- *les mesures harmoniques pour $\mathscr{F}$;*
- *les mesures sur V_{p_0} qui sont P-stationnaires.*

La preuve suit le même cheminement logique que dans celle du théorème 3.2.1 : la première étape, étant donnée une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$, est de prolonger les densités locales, puis de les discrétiser grâce au théorème de Lyons-Sullivan, pour enfin montrer la P-stationnarité de la mesure m_{p_0}. La seconde étape, étant donnée une mesure P-stationnaire, est de construire une mesure sur le revêtement $\widetilde{B}\times V$ qui passe au quotient, et dont les densités par rapport au volume dans les feuilles satisfont à une condition de P-harmonicité, puis d'utiliser le théorème de Lyons-Sullivan pour prouver que ces densités sont en fait harmoniques.

Discrétisation des densités harmoniques. Supposons les hypotèses du théorème et soit m une mesure harmonique. Rappelons que pour tout $t \in A$, les densités $h_{i_0}(.,t)$ possèdent une extension harmonique à $\widetilde{L}_t$ définie par la formule (3.5.8), qu nous avons notées H_t.

Le théorème de discrétisation des fonctions harmoniques nous permet de prouver le lemme suivant :

Lemme 3.5.10. *Soit $t \in A$, et $z \in \widetilde{L}_t$. Alors nous avons la formule suivante :*

$$H_t(z) = \sum_{\gamma \in \pi_1(B)} \mu_z^t(\gamma) h_{i_0}(p_0, \rho(\gamma)^{-1} t) \frac{d[\gamma * \nu_{i_0}]}{d\nu_{i_0}}(t).$$

Preuve. Ce lemme se prouve exactement comme le lemme 3.2.4. □

Proposition 3.5.11. *La mesure m_{p_0} sur V_{p_0} définie par la proposition 3.5.3 est P-stationnaire.*

Preuve. En nous souvenant que $m_{p_0} = h_{i_0}(p_0,t)\nu_{i_0}$, et qu'alors $\gamma * m_{p_0} = h_{i_0}(p_0, \gamma^{-1}(t))\gamma * \nu_{i_0}(t)$, et en appliquant le lemme 3.5.10 lorsque $o = z$, exactement comme dans la fin de la preuve de la proposition 3.2.3, il vient la formule suivante, pour tout $t \in A$:

$$1 = \sum_{\gamma \in \pi_1(B)} \mu_o^t(\gamma) \frac{d[\gamma * m_{p_0}]}{m_{p_0}}(t).$$

Par définition du noyau, on a $\mu_o^t(\gamma) = P(t, \gamma^{-1})$, et par la propriété de symétrie du noyau (voir le lemme 3.5.8), nous avons $P(t,\gamma^{-1}) = P(\rho(\gamma)^{-1} t, \gamma)$, de sorte que nous puissions écrire, en multipliant l'égalité ci-dessus par m_{p_0} (cette égalité a lieu m_{p_0}-presque partout) :

$$m_{p_0} = \sum_{\gamma \in \pi_1(B)} P(\rho(\gamma)^{-1} t, \gamma) \gamma * m_{p_0},$$

cette équation traduit la P-stationnarité de m_{p_0}. □

Lemme 3.5.12. *L'application $m \mapsto m_{p_0}$ est injective.*

Preuve. Puisque la base B est compacte, et puisque m_{p_0} est équivalente à la mesure conditionnelle de m sur la fibre V_{p_0}, nous pouvons conclure en utilisant le théorème de décomposition ergodique, comme nous l'avons expliqué précédemment. □

Reconstruction des mesures harmoniques. Nous choisissons ici une mesure P-stationnaire ν sur V. Le but de la proposition suivante est de construire une mesure harmonique m de sorte que ν s'identifie à la mesure m_{p_0} de m.

Avant de l'énoncer, notons que pour toute mesure P-stationnaire ν sur V, les mesures $\gamma * \nu$ sont toutes dans la même classe de mesures : en particulier, il existe un Borélien A de V de mesure pleine pour ν tel que pour tout $t \in A$, $d[\gamma * \nu]/d\nu(t)$ soit bien défini.

Lemme 3.5.13. *Considérons la fonction suivante, définie pour tout $t \in A$, et tout $z \in \widetilde{L}_t$:*

$$H_t(z) = \sum_{\gamma \in \pi_1(B)} \mu_z^t(\gamma) \frac{d[\gamma * \nu]}{d\nu}(t).$$

Alors, on a pour tout $\eta \in \pi_1(B)$, et pour tout $t \in A$,

$$H_t(\eta o) = \frac{d[\eta * \nu]}{d\nu}(t).$$

Preuve. Le P-stationnarité de ν se traduit en disant que cette mesure est la somme des mesures définies par $\mu_o^t(\gamma)\, d[\gamma * \nu]/d\nu(t)$. Si $\eta \in \pi_1(B)$, alors on obtient la mesure $\eta * \nu$ en sommant les images par η des mesures ci-dessus. Ces mesures valent :

$$\mu_o^{\rho(\eta)^{-1}t}(\gamma)[(\eta\gamma) * \nu].$$

Le lemme 3.5.5 nous donne l'égalité $\mu_o^{\rho(\eta)^{-1}t}(\gamma) = \mu_{\eta o}^t(\eta\gamma)$. À présent, il suffit de faire le changement de variables $\xi = \eta\gamma$ pour trouver que pour tout $t \in A$:

$$\sum_{\xi \in \pi_1(B)} \mu_{\eta o}^t(\xi)\, [\xi * \nu] = \eta * \nu.$$

Ces deux mesures sont équivalentes à ν : l'égalité des densités par rapport à ν donne l'égalité voulue. □

Proposition 3.5.14. *Considérons, pour $t \in A$, la fonction H_t definie sur $\widetilde{L}_t$ dans le lemme 3.5.13. Alors :*

1. *pour tout $t \in A$, H_t est une fonction harmonique sur $\widetilde{L}_t$;*
2. *la mesure $\widetilde{m}$ obtenue sur $\widetilde{B} \times V$ en intégrant contre ν les $H_t(z)\mathrm{Leb}_{\widetilde{L}_t}$ est invariante par l'action diagonale de $\pi_1(B)$: on appelle m la mesure quotient sur M ;*
3. *en appliquant à m la construction de la proposition 3.5.3, on trouve que $m_{p_0} = \nu$.*

Preuve. Pour prouver que la fonction H_t est harmonique, il suffit, par le théorème 3.1.4, de prouver que pour tout $\eta \in \pi_1(B)$, on a :

$$H_t(\eta o) = \sum_{\gamma \in \pi_1(B)} \mu_{\eta o}^t(\gamma) H_t(\gamma o).$$

Mais cette identité est une simple conséquence du lemme précédent.

Définissons la mesure $\widetilde{m}$ en intégrant contre ν les mesures $H_t(z)\mathrm{Leb}_{\widetilde{L}_t}$: nous voulons prouver l'invariance par l'action diagonale de $\pi_1(B)$. Remarquons d'abord que pour tout $t \in A$, puisque la fonction induite par γ, $\widetilde{L}_t \to \widetilde{L}_{\rho(\gamma)t}$ est une isométrie, entraînant ainsi l'égalité $\gamma * \mathrm{Leb}_{\widetilde{L}_t} = \mathrm{Leb}_{\widetilde{L}_{\rho(\gamma)t}}$.

Ainsi, pour prouver l'invariance par l'action, il suffit d'établir l'égalité suivante pour tout $t \in A$, tout $z \in \widetilde{L}_t$, et tout $\gamma \in \pi_1(B)$:

$$\frac{d[\gamma * \nu]}{d\nu}(t) = \frac{H_t(z)}{H_{\rho(\gamma)^{-1}t}(\gamma^{-1}z)}.$$

Puisque l'application qu'induit γ^{-1} entre $\widetilde{L}_t$ et $\widetilde{L}_{\rho(\gamma)^{-1}t}$ est une isométrie, la fonction $\frac{d[\gamma*\nu]}{d\nu}(t)\, H_{\rho(\gamma)^{-1}t} \circ \gamma^{-1}$ est harmonique sur $\widetilde{L}_t$. Par le théorème de 3.1.4, pour montrer que cette fonction est identiquement égale à H_t, il suffit de vérifier l'égalité en restriction à l'orbite $\pi_1(B)o$.

Mais cette dernière égalité est immédiate puisque, par le lemme 3.5.13, on a pour tout $t \in A$, et tous $\gamma, \eta \in \pi_1(B)$:

$$\frac{d[\gamma * \nu]}{d\nu}(t) H_{\rho(\gamma)^{-1}t}(\gamma^{-1}\eta o) = \frac{d[\gamma * \nu]}{d\nu}(t) \frac{d[(\gamma^{-1}\eta) * \nu]}{d\nu} \circ \rho(\gamma)^{-1}(t).$$

Mais les égalités suivantes sont vraies ν-presque partout : $d[(\gamma^{-1}\eta) * \nu]/d\nu \circ \rho(\gamma)^{-1} = d[\eta * \nu]/d[\gamma * \nu]$, et $d[\gamma * \nu]/d\nu \times d[\eta * \nu]/d[\gamma * \nu] = d[\eta * \nu]/d\nu$. On conclut en remarquant que par une nouvelle application du lemme précédent, $H_t(\eta o) = d[\eta * \nu]/d\nu(t)$. Ainsi, la mesure $\widetilde{m}$ est invariante par l'action diagonale de $\pi_1(B)$ sur $\widetilde{B} \times V$.

Pour conclure, puisque H_t vaut identiquement 1 sur $\{o\} \times V$ (c'est une autre manière de traduire la P-stationnarité de ν), il vient en suivant les mêmes étapes de la preuve de la proposition 3.5.3, que $m_{p_0} = \nu$: la dernière assertion suit donc. □

Chapitre IV

Mesures harmoniques et mesures de Gibbs

1 | Cas des feuilletages par surfaces hyperboliques : une nouvelle preuve du théorème de Bakhtin-Martínez

1.1 – Groupe affine et feuilletage centre-instable pour le flot géodésique

Le groupe spécial affine. Le groupe des transformations affines de la sphère se réalise comme un sous-groupe résoluble de $PSL_2(\mathbb{C})$ constitué de matrices triangulaires supérieures. Le *groupe spécial affine*, est le sous-groupe constitué des transformations affines qui préservent le demi-plan. Nous avons fait le choix, dans cette thèse, de nous intéresser au feuilletage instable plutôt qu'au feuilletage stable, nous allons donc considérer les matrices triangulaires inférieures :

$$\mathrm{Aff} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix}; a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nous appellerons ce groupe tout simplement le groupe affine. C'est naturellement un groupe de Lie : il possède une structure de variété C^∞, difféomorphe à un demi-plan, et les opérations de groupes sont lisses.

Action sur $PSL_2(\mathbb{R})$. En agissant par homographies, le groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ se réalise comme groupe des isométries directes du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$. L'action naturelle sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}$ est libre et transitive, de sorte que l'on puisse identifier $PSL_2(\mathbb{R})$ et $T^1\mathbb{H}$. On peut alors s'assurer que :

- la métrique de Sasaki s'identifie à l'unique métrique Riemannienne sur $PSL_2(\mathbb{R})$ qui soit invariante par translation à droite (et aussi à gauche) ;
- la mesure de Liouville s'identifie à la mesure de Haar, c'est-à-dire l'unique (à une constante près) mesure sur $PSL_2(\mathbb{R})$ invariante par translations à droite (et à gauche) ;
- le flot géodésique s'identifie au sous-groupe à un paramètre de translations à droite par :
$$\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix};$$
- le flot horocyclique stable s'identifie au sous-groupe à un paramètre de translations à droite par :
$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
- le flot horocyclique instable s'identifie au sous-groupe à un paramètre de translations à droite par :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix};$$

L'action par translation à droite du groupe affine coïncide donc avec l'action jointe du flot géodésique et du flot horocyclique instable.

Nous notons également que les flots horocycliques stable et instable engendrent tout $PSL_2(\mathbb{R})$ de sorte par exemple, que l'on obtienne la proposition suivante.

Proposition 4.1.1. *La mesure de Liouville est l'unique mesure sur $T^1\mathbb{H}$, à une constante multiplicative près, qui soit invariante par l'action jointe des deux flots horocycliques.*

Le fibré $T^1\mathbb{H}$ s'écrit $\mathbb{H} \times S_\infty$, où $S_\infty = \partial\mathbb{H} = \mathbb{RP}^1$ est le cercle à l'infini, et cette identification est équivariante par l'action de $PSL_2(\mathbb{R})$. Ce point de vue nous permet d'identifier *isométriquement* les tranches $\mathbb{H} \times \{\xi\}$, $\xi \in S_\infty$ avec :
- les feuilles centre-instables ;
- les orbites de l'action à droite du groupe affine Aff.

1.2 – Mesures harmoniques sur le demi-plan hyperbolique.

Le but de ce paragraphe est de prouver la proposition suivante.

Theorème 4.1.2. *Il existe une correspondance bijective entre les mesures harmoniques sur* $\mathbb{H}$ *et les mesures sur* $T^1\mathbb{H}$ *invariantes par l'action jointe du flot géodésique et du flot horocyclique instable.*

Plus précisément nous prouvons :
- que chaque feuille centre-instable porte canoniquement une mesure invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable, appelée *mesure caractéristique* de la feuille centre-instable, qui de plus est équivalente à la mesure d'aire hyperbolique, et dont la densité est donnée par le noyau de Poisson correspondant ;
- qu'en conséquence, toute mesures de Borel invariantes par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable est obtenue par intégration des mesures caractéristiques contre une mesure de Borel finie sur le cercle à l'infini ;
- que la projection de toute mesure invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable est harmonique ;
- que toute mesure harmonique s'obtient ainsi.

Noyau de Poisson. À chaque feuille centre-instable $\mathbb{H} \times \{\xi\}$, $\xi \in S_\infty$ est associée une unique fonction harmonique (à une constante multiplicative près) $k(.,\xi)$ telle que $\lim_{z\to\xi'} k(z,\xi) = 0$ lorsque $\xi' \neq \xi$ et ∞ sinon (la convergence $z \to \xi'$ est non-tangentielle). Il s'agit du *noyau de Poisson* donné par la formule suivante pour $z = x + \mathbf{i}y$:

$$k(z,\xi) = \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}.$$

Remarque. Pour trouver cette formule, il suffit de savoir prouver cela lorsque $\xi = \infty$, et de prouver que l'unique fonction qui convient est donnée par $k(z,\infty) = \mathrm{Im}(z)$. L'unique fonction $k(.,\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$, sera alors $\mathrm{Im} \circ g_{\xi\to\infty}$, où $g_{\xi\to\infty}$ est une homographie qui envoie ξ sur le point à l'infini. Cette formule ne dépend bien entendu pas de la transformation $g_{\xi\to\infty}$: deux telles homographies ne diffèrent (à constante multiplicative près) que d'une translation parallèle à l'axe réel, opération qui à l'évidence ne change pas la partie imaginaire.

Nous pouvons donc considérer l'homographie envoyant un point $z \in \mathbb{H}$ sur $g_{\infty\to\xi}(z) = -\frac{1}{z-\xi}$. Un calcul immédiat donne alors que pour tout $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{H}$,

$$k(z,\xi) = -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z-\xi}\right) = \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}.$$

Nous avons donc le théorème suivant, dû à Herglotz, dont on trouvera une preuve dans [Ru] :

Theorème 4.1.3. *Il y a une correspondance bijective entre les mesures de Borel finies sur* S_∞ *et les fonctions harmoniques positives sur* $\mathbb{H}$ *donnée par* $\eta \mapsto K[\eta]$*, où* $K[\eta]$*, qu'on appelle l'intégrale de Poisson de* η*, vérifie pour tout* $z \in \mathbb{H}$ *:*

$$K[\eta](z) = \int_{S_\infty} k(z,\xi)\, d\eta(\xi).$$

L'application réciproque se construit en remarquant que par la propriété de la moyenne, la mesure sur le cercle C_R centré en $\mathbf{i}$ et de rayon R définie par $h_{|C_R}\mathrm{Leb}_{C_R}$ est une famille de mesure finie de masse totale $h(\mathbf{i})$: par compacité nous pouvons alors extraire une limite, montrer que c'est la seule possible, puis, prouver que h est l'intégrale de Poisson, ce qui requiert de savoir résoudre le problème de Dirichlet à l'infini (c'est-à-dire le cas où η a une densité continue par rapport à Lebesgue). Les détails se trouvent dans [Ru].

Mesures invariantes par le groupe affine. La proposition suivante, qui caractérise les mesures de Borel sur $T^1\mathbb{H}$ qui sont invariantes par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable. Chaque feuille centre-instable $\mathbb{H}\times\{\xi\}$ porte une *mesure caractéristique*, qui, par définition, a une densité $k(.,\xi)$ par rapport à l'aire hyperbolique. Nous pouvons alors prouver :

Proposition 4.1.4. *Une mesure de Borel sur $T^1\mathbb{H}$ est invariante par l'action jointes des flots géodésique et horocyclique instable si et seulement si elle s'obtient par intégration contre une certaine mesure finie η sur S_∞ des mesures caractéristiques des feuilles centre-instables μ_ξ.*

Lemme 4.1.5. *Il y a, à une constante multiplicative près, une unique mesure de Borel sur $\mathbb{H}\times\{\infty\}$ qui soit invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable : elle a une densité par rapport à la mesure d'aire hyperbolique donnée par la fonction "partie imaginaire".*

Preuve. L'action jointe des deux flots sur la feuille centre-instable correspondant à l'infini est exactement donnée par l'action du groupe affine Aff sur lui-même par translations à droite. Nous savons qu'il possède, à une constante multiplicative près, une unique mesure de Haar à droite. Ainsi s'ensuivent l'existence et l'unicité de la mesure désirée.

Nous affirmons que, si l'on écrit $\mathbb{H}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y>0\}$, la mesure recherchée s'écrit en coordonnées :

$$\mu_\infty=\frac{dx\,dy}{y}.$$

Pour le voir il suffit de prouver qu'elle est préservée par le flot géodésique et par le flot horocyclique instable. Pour ce faire, en utilisant le théorème de Fubini, il suffit de prouver que les deux flots, en restriction aux droites horizontales, préservent l'élément dx, et, en restriction aux demi-droites verticales, préservent l'élément dy/y.

En restriction à $\mathbb{H}\times\{\infty\}$, le flot horocyclique instable se réalise comme un sous-groupe à un paramètre de translations le long des droites horizontales : il préserve donc les deux éléments dx et dy/y.

Le flot géodésique se réalise comme le sous-groupe à un paramètre de translation le long des demi-droites verticales *paramétrées par la longueur d'arc hyperbolique*. Ainsi, il préserve l'élément dx, et l'élément *de longueur hyperbolique* sur les demi-droites verticale dy/y.

Dans ces coordonneés, l'élément d'aire hyperbolique se lit $dx\,dy/y^2$: ainsi, nous concluons que la densité de μ_∞ par rapport à l'aire hyperbolique est donnée par la fonction y. □

Comme conséquence de ce lemme, nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 4.1.6. *Soit $\xi\in S_\infty$. Il y a, à une constante multiplicative près, une unique mesure de Borel sur la feuille centre-instable correspondant à ξ qui soit invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable a une densité par rapport à la mesure d'aire hyperbolique donnée par la fonction $k(.,\xi)$.*

Preuve. Soit $\xi\in\mathbb{R}$. Considérons l'homographie $g_{\xi\to\infty}: z\mapsto -\frac{1}{z-\xi}$. C'est une isométrie du demi-plan hyperbolique, sa différentielle commute donc avec les flots géodésique et horocycliques, et l'application induite $W^{cu}_\xi\to W^{cu}_\infty$ est donnée par $g_{\xi\to\infty}$.

En particulier, en vertu du lemme précédent, la mesure $\mu_\xi = (Dg_{\xi\to\infty})^{-1} * \mu_\infty$ est une mesure sur la feuille centre-instable correspondant à ξ invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable.

Encore parce que $g_{\xi\to\infty}$ est une isométrie, elle préserve l'aire hyperbolique, de sorte que μ_ξ a une densité par rapport à l'aire hyperbolique obtenue en composant celle de μ_∞ par $g_{\xi\to\infty}$: on obtient donc $\mathrm{Im} \circ g_{\xi\to\infty} = k(.,\xi)$, comme nous l'avons remarqué précédemment.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que cette mesure est la seule, à multiplication près par une constante, qui soit invariante par l'action jointe des deux flots. Pour ce faire, nous prenons une telle mesure et la poussons par la différentielle de $g_{\xi\to\infty}$. Par le même argument que ci-dessus, ainsi que par la partie "unicité" du lemme précédent, nous trouvons que la mesure que l'on obtient est nécessairement un multiple de μ_∞. C'est donc que la mesure initiale était un multiple de μ_ξ. Nous pouvons donc conclure la preuve du lemme. ☐

Fin de la preuve de la proposition 4.1.4. Cette proposition est une conséquence immédiate des deux lemmes précédents. Si l'on considère une mesure μ invariante par l'action jointe des deux flots, ou c'est équivalent, par l'action du groupe affine, nous pouvons désintégrer dans les feuilles centre-instables, qui sont aussi les orbites de l'actions du groupe affine.

Nous obtenons alors un système de mesures contitionnelles qui sont invariantes par cette action : par les deux lemmes précédents, nous obtenons, quitte à renormaliser par une fonction mesurable, exactement les mesures caractéristiques μ_ξ. Nous pouvons donc conclure la preuve. ☐

Relevé canonique d'une mesure harmonique. Une mesure harmonique m sur $\mathbb{H}$ a une densité par rapport à Lebesgue qui est une fonction harmonique positive $h : \mathbb{H} \to (0,\infty)$. Par le théorème de Herglotz 4.1.3, h s'écrit comme l'intégrale de Poisson d'une mesure de Borel finie η sur S_∞.

Proposition 4.1.7. *Soit m une mesure harmonique sur $\mathbb{H}$, et η la mesure de Borel finie sur S_∞ qui lui correspond. La mesure μ invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instables correspondant à η se projette sur m. Nous appelons μ le **relevé canonique** de la mesure harmonique m.*

Preuve. La preuve de cette proposition est immédiate. En effet, μ est obtenue par intégration contre η des $\mu_\xi = k(z,\xi)\mathrm{Leb}_{\mathbb{H}\times\{\xi\}}(z)$. La projection canonique étant une isométrie en restriction aux $\mathbb{H}\times\{\xi\}$, la projection est une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue, et la densité est obtenue en intégrant les densités des mesures conditionnelles contre η.

Nous reconnaissons la densité de m : c'est donc que c'est la projection canonique de m. ☐

Fin de la preuve du théorème 4.1.2. La preuve de la proposition 4.1.7 s'adapte pour prouver que la projection de toute mesure sur $T^1\mathbb{H}$ invariante par les flots géodésique et horocyclique instable est une mesure harmonique. Ainsi donc nous avons deux applications réciproques l'une de l'autre :

- la projection des mesures sur $T^1\mathbb{H}$ invariantes par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable ;
- le relevé canonique des mesures harmoniques sur $\mathbb{H}$.

Ceci nous permet donc d'achever la preuve du théorème 4.1.2. ☐

1.3 – Mesures harmoniques et flot géodésique feuilleté pour des feuilletages par surfaces de Riemann hyperboliques

Versions d'un théorème de Martínez. Nous nous intéressons dans ce paragraphe au cas d'une variété close $(M,\mathscr{F})$ feuilletée par des surfaces hyperboliques : c'est-à-dire au cas où le feuilletage est muni d'une métrique feuilletée de sorte que la courbure des feuilles vaille -1 identiquement. Un théorème de Candel [Ca] assure l'existence d'une telle métrique feuilletée lorsque les feuilles de $\mathscr{F}$ sont *de type hyperbolique*, c'est-à-dire lorsque leur caractéristique d'Euler-Poincaré est négative.

Martínez, dans une série de deux papiers dont l'un écrit en collaboration avec Bakhtin (voir [Ma, BMar]), a donné une version feuilletée du théorème 4.1.2. Nous proposons ci-dessous une preuve plus courte de ce résultat, ainsi que, dans le paragraphe suivant, une généralisation en dimension supérieure, dans le cas où la courbure sectionnelle des feuilles est négative, mais variable. Remarquons que Connell et Martínez ont aussi donné dans [CM] une preuve dans le cas de laminations par des espaces symétriques de rang supérieur, utilisant une adaptation de l'argument que nous développerons, et qui nous avait été suggéré par Marco Brunella.

Theorème 4.1.8. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée par des surfaces de Riemann hyperboliques. Il existe alors une correspondance bijective entre les mesures harmoniques pour $\mathscr{F}$ et les mesures sur $T^1\mathscr{F}$ invariantes par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable feuilletés.*

Il est prouvé dans [BGM] que ce théorème s'écrit aussi sous une autre forme, et c'est celle-ci que nous généraliserons.

Theorème 4.1.9. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée par des surfaces de Riemann hyperboliques. Il existe alors une correspondance bijective entre les mesures harmonique pour $\mathscr{F}$ et les états de u-Gibbs sur $T^1\mathscr{F}$ pour le flot géodésique feuilleté.*

Nous rappelons qu'un état de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté est une mesure sur $T^1\mathscr{F}$ qui est invariante par le flot, et dont la désintégration dans les feuilles instables est équivalente à Lebesgue. Dans ce cas précis, les feuilles instables sont précisément les horocycles munis du vecteur normal sortant de l'horodisque correspondant, paramétrés par le flot horocyclique instable : les états de u-Gibbs ne sont donc rien d'autre que les mesures invariantes par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable feuilletés.

Mesures invariantes par le flot géodésique et par les deux flots horocycliques. Nous énonçons ici une proposition que l'on peut trouver dans [BG, Ma], et que nous généraliserons plus loin lors de notre étude des états de u-Gibbs.

Proposition 4.1.10. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée par des surfaces de Riemann hyperboliques. Supposons qu'il existe une mesure μ sur $T^1\mathscr{F}$ invariante par les flots géodésique et horocycliques stable et instable feuilletés. Alors μ est totalement invariante, et en particulier, le feuilletage $\mathscr{F}$ admet une mesure transverse invariante par holonomie.*

Preuve. Comme nous l'avons remarqué dans la proposition 4.1.1, les flots géodésique, et horocycliques stable et instable engendrent le groupe $PSL_2(\mathbb{R})$, si bien que la mesure de Liouville, qui est la mesure de Haar bi-invariante de $PSL_2(\mathbb{R})$, est l'unique mesure, à une constante multiplicative près, qui soit invariante par l'action des trois flots.

Ainsi, si une mesure μ sur $T^1\mathscr{F}$ est invariante par l'action jointe des trois flots, ses mesures conditionnelles dans les plaques sont des multiples de la mesure de Liouville. Il s'ensuit alors que μ s'écrit dans une carte comme le produit de la mesure de Liouville et d'une mesure transverse, et que la famille des mesures transverses ainsi définie, est invariante par l'holonomie du feuilletage $\widehat{\mathscr{F}}$ qui est, rappelons-le, égale à celle de $\mathscr{F}$. Pour les détails, voir les références citées ci-dessus, ainsi que la preuve du théorème 5.2.4, où nous donnons plus en détail une condition suffisante pour l'existence de mesures transverses invariantes pour un feuilletage dont les feuilles sont courbées négativement. □

Relevé canonique d'une mesure harmonique. Nous considérons dans la suite une variété close $(M,\mathscr{F})$ feuilletée par des surfaces hyperboliques. Considérons un bon atlas feuilleté $\mathscr{A}=(U_i,\phi_i)_{i\in I}$, ainsi que la transversale complète correspondante $\mathscr{T}=\bigsqcup_{i\in I}T_i$. Nous rappelons qu'alors nous pouvons former un atlas pour le feuilletage $\widehat{\mathscr{F}}$ de $T^1\mathscr{F}$ en tirant $\mathscr{A}$ en arrière par le fibré unitaire tangent aux feuilles, qu'alors $\mathscr{T}$ est encore une transversale complète de $\widehat{\mathscr{F}}$, et qu'en prime, les deux feuilletages $\mathscr{F}$ et $\widehat{\mathscr{F}}$ ont même pseudogroupe d'holonomie.

Nous nous proposons l'énoncé suivant :

Proposition 4.1.11. *Supposons que les feuilles de $\mathscr{F}$ soient des surfaces de Riemann hyperboliques. Pour toute mesure m harmonique pour le feuilletage $\mathscr{F}$, il existe une mesure μ sur $T^1\mathscr{F}$ qui est invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instables feuilletés, et qui induit la même mesure que m sur la transversale complète $\mathscr{T}$.*

Soit m une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$. Pour tout $i\in I$, m s'écrit, en restriction à U_i, sous la forme :

$$m_{|U_i}=h_i(z,x)\mathrm{Leb}_{P_i(x)}(z)\,\nu_i(x),$$

où h_i et une fonction mesurable sur U_i qui est harmonique sur ν_i-presque toute plaque $P_i(x)$. Rappelons que les ν_i induisent une mesure que nous noterons $\widehat{m}$ sur $\mathscr{T}$ qui est quasi-invariante par le pseudogroupe, et que le cocycle de Radon-Nikodym ainsi défini est donné par le quotient de fonctions harmoniques. Plus précisément, lorsque $U_i\cap U_j\neq\emptyset$, nous pouvons, en évaluant m sur l'intersection $U_i\cap U_j$ écrire pour ν_j-presque tout $x\in\mathrm{but}(\tau_{ij})$ et $z\in P_j(x)\cap P_j(\tau_{ij}^{-1}(x))$:

$$\frac{d[\tau_{ij}*\nu_i]}{\nu_j}(x)=\frac{h_j(z,x)}{h_i(z,\tau_{ij}^{-1}(x))}.$$

Nous rappelons qu'il est possible, grâce au lemme de Ghys 1.3.3, d'étendre harmoniquement les densités locales "sur une feuille typique" : autrement dit, il existe un ensemble de Borel $\mathscr{X}\subset\mathscr{T}$ de mesure pleine pour ν_{i_0}, telle que pour tout $x\in\mathscr{X}$, (par exemple $x\in T_{i_0}$ pour $i_0\in I$) la formule suivante definisse une extension harmonique de $h_{i_0}(.,x)$ à la feuille L_x :

$$H_x(z)=\frac{d[\tau_c^{-1}*\nu_i]}{d\nu_{i_0}}(x)h_i(z,\tau_c(x)),$$

où $z\in L_x$, i est tel que $z\in U_i$, et c est n'importe quel chemin reliant c à z.

Preuve de la proposition 4.1.11. Nous donnerons plus tard la preuve dans le cas plus général des feuilletages par feuilles courbées négativement. Nous n'indiquons ici que les étapes de la preuve.

- Nous choisissons un bon atlas feuilleté suffisamment fin.
- Nous pouvons nous ramener au cas d'une mesure harmonique ergodique m, et sélectionner une petite transversale T_{i_0} rencontrant presque toute feuille.
- Nous étendons la densité harmonique sur une feuille typique, que nous pouvons relever au revêtement universel, obtenant ainsi une fonction $\widetilde{H}_x$, $x\in T_{i_0}$
- En utilisant la proposition 4.1.7, nous pouvons canoniquement relever la mesure harmonique sur $\mathbb{H}$ avec densité $\widetilde{H}_x$, obtenant ainsi une mesure sur $T^1\mathbb{H}$ invariante par le flot géodésique et le flot horocyclique instable.
- En projetant sur le feuilletage, nous avons une mesure définie sur T^1L.
- Nous la multiplions dans les plaques par un cocycle convenable de sorte à pouvoir recoller les mesures de façon cohérente avec l'holonomie de $\widehat{\mathscr{F}}$ qui, nous le rappelons, est la même que celle de $\mathscr{F}$.

– Nous intégrons les mesures locales contre les mesures transverses induites par m, obtenant ainsi une mesure invariante par l'action jointe des deux flots qui de plus induit sur la transversale complète de $\mathscr{F}$ la même mesure que m. □

Lemme 4.1.12. *La mesure obtenue dans la proposition 4.1.11 se projette sur m. Nous l'appelons le **relevé canonique** de la mesure m.*

Preuve. La preuve de ce lemme est une immédiate adaptation de celle de la proposition 4.1.7. □

Projection d'une mesure invariante par les deux flots. Nous avons relevé les mesures harmoniques, et prouvé qu'il existe toujours une mesure sur $T^1\mathscr{F}$ invariante par les flots géodésique et horocyclique instable feuilletés qui se projettent dessus. Nous voulons à présent montrer que toute mesure sur $T^1\mathscr{F}$ invariante par ces deux flots se projette sur une mesure harmonique.

Proposition 4.1.13. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée par des surfaces hyperboliques. Soit μ une mesure invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable feuilletés. Alors la projection de μ le long des fibres unitaires tangentes est une mesure harmonique qui induit la même mesure sur une transversale complète.*

Preuve. Soit $(M,\mathscr{F})$ un tel feuilletage : nous prenons un bon atlas feuilleté $\mathscr{A} = (U_i,\phi_i)$. Comme d'habitude, nous pouvons relever cet atlas en le tirant en arrière par le fibré unitaire tangent. Supposons alors que μ soit invariante par l'action des deux flots, et considérons sa désintégration dans les plaques de $P_i \times S_\infty \times T_i$.

Par les lemmes 4.1.5 et 4.1.6, les mesures conditionnelles de μ dans les $P_i \times \{\xi\} \times \{x\}$ ont une densité par rapport à l'aire hyperbolique qui est donnée par le noyau de Poisson $k(.,\xi)$, et les mesures conditionnelles de μ dans les plaques $P_i \times S_\infty \times \{x\}$ sont obtenues en intégrant ces mesures contre une certaine mesure η_x sur S_∞.

Le mesures conditionnelles de la projection m de μ sur M ont donc une densité par rapport à la mesure d'aire hyperbolique (la projection canonique est, en restriction aux plaques $P_i \times \{\xi\} \times \{x\}$, une isométrie), et les densités sont données par les intégrales de celles des mesures ci-dessus contre η_x : ce sont ainsi des fonctions harmoniques.

Nous concluons alors que la projection d'une mesure sur $T^1\mathscr{F}$ invariante par les deux flots est une mesure harmonique. Clairement, les deux mesures induisent la même mesure sur une transversale complète. □

Mesure induite sur la transversale complète. Dans [BMar], afin de prouver que deux mesures invariantes par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable différentes se projettent sur deux mesures harmoniques différentes, Bakhtin et Martínez utilisent l'unicité de la représentation de Poisson de la densité harmonique caractéristique d'une feuille typique (voir l'énoncé du théorème de Herglotz 4.1.3).

Nous proposons un argument différent que nous généraliserons plus loin et qui est une variation de l'argument de Hopf.

Proposition 4.1.14. *Soit $(M,\mathscr{F})$ un feuilletage par surfaces hyperboliques. Alors :*

1. *toute mesure invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable feuilletés induit une mesure finie sur une transversale complète quasi-invariante par holonomie ;*
2. *si deux telles mesures sont différentes, alors les mesures qu'elles induisent sont différentes.*

Preuve. Ici encore, nous donnerons l'argument complet lorsque nous nous intéresserons plus loin aux feuilletages à feuilles courbées négativement. Nous pouvons néanmoins donner quelques indications de la preuve, qui utilise le fait que le flot horocyclique stable feuilleté induit des difféomorphismes locaux entre les variétés centre-instables (si l'on préfère, le feuilletage stable est lisse, et donc absolument continu).

La première partie découle assez facilement du fait qu'une mesure invariante par l'action jointe des deux flots feuilletés possède une désintégration absolument continue dans les feuilles centre-instables.

Pour voir que la seconde a encore lieu, il suffit de considérer le cas où les deux mesures sont ergodiques (une composante ergodique d'un état de u-Gibbs en est encore un) : il faut alors prouver que si les deux mesures induites ne sont pas sont singulières, alors les mesures ergodiques sont égales.

L'idée est la suivante. Si les deux mesures induites par, disons, μ_1 et μ_2, ne pas sont singulières, alors le bassin d'attraction (dans le passé et le futur) de μ_1 se projette le long des plaques sur la transversale complète en un ensemble de mesure positive pour $\widehat{\mu_2}$ (nous notons $\widehat{\mu_i}$ la mesure induite sur une transversale complète). Prenons alors une plaque dans cet ensemble de mesure positive.

Puisque μ_1 et μ_2 ont une désintégration absolument continue dans les feuilles centre-instables, le bassin d'attraction de μ_1 rencontre presque toute plaque centre-instable en un ensemble plein pour la mesure de Lebesgue, et il existe une plaque centre-instable qui rencontre celui de μ_2 en un ensemble de mesure positive pour la mesure de Lebesgue.

Par un argument d'absolue continuité, nous pouvons alors trouver un point du bassin d'attraction de μ_1 et un point du bassin d'attraction de μ_2 appartenant à la même orbite du flot horocyclique stable feuilleté. C'est donc que ces mesures sont égales. □

Corollaire 4.1.15. *Soit $(M, \mathscr{F})$ un feuilletage par surfaces hyperboliques. Alors deux mesures différentes invariantes par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable feuilletés se projettent sur des mesures harmoniques différentes.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate des propositions 4.1.13 et 4.1.14. □

Fin de la preuve du théorème 4.1.8. Nous récapitulons le contenu de la proposition 4.1.11 et du corollaire 4.1.15. Il y a deux opérations qui sont réciproques l'une de l'autre :
– le relevé canonique d'une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$;
– la projection d'une mesure invariante par l'action jointe des flots géodésique et horocyclique instable feuilletés.

Nous obtenons ainsi la bijection recherchée entre les mesures harmoniques et les mesures invariantes par les flots géodésique et horocyclique instable feuilletés. □

2 | Mouvement Brownien en courbure négative

Nous avons traité ci-dessus le cas des mesures harmoniques des variétés feuilletées par des surfaces hyperboliques. Le but de cette section est de généraliser le théorème de Martínez, Bakhtin-Martínez, au cadre des feuilles de dimension quelconque et de courbure négative.

En dimension supérieure, il n'y a pas de flot horocyclique, c'est une première difficulté. Même si l'on peut remonter canoniquement une mesure harmonique au fibré unitaire tangente, il n'y a aucune raison que la mesure ainsi obtenue soit invariante par le flot géodésique : c'est une difficulté supplémentaire.

Nous allons développer une idée dûe à Ledrappier [L1] (voir aussi [Ha1]). En courbure négative, presque tout chemin Brownien est escorté par un rayon géodésique. L'idée consiste alors à remplacer l'étude ergodique du mouvement Brownien à celle des géodésiques qui escortent les chemins Browniens. Nous verrons que les mesures de Gibbs nous permettent de faire exactement ceci.

Dans le cadre des feuilletages par variétés courbées négativement, nous proposons donc une notion de mesure de H-Gibbs, qui sont invariantes par le flot géodésique feuilleté et qui décrivent exactement le comportement ergodique des géodésiques escortant les chemins Browniens tangents aux feuiles.

Nous proposons donc de prouver le théorème suivant, dont on donnera une version plus précise plus tard (voir le théorème 4.3.12).

Theorème 4.2.1. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée telle que toutes les feuilles soient courbées négativement. Alors il existe une correspondance bijective entre les mesures de H-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté et les mesures harmoniques.*

2.1 – Comportement asymptotique des chemins Browniens

Dans la suite, N désignera une variété Riemannienne complète, connexe et simplement connexe de courbure négative pincée.

Escorte géodésique Si $z\in N$, un vecteur *non nul* $v\in T_zN$ peut être décrit par ses *coordonnées polaires*, c'est-à-dire par le couple $(r,\theta)\in(0,\infty)\times T^1_zN$, tel que $v=r\theta$. La courbure sectionnelle de N est négative partout, donc l'application exponentielle $\exp_z : T_zN\to N$ est un difféomorphisme : en particulier, un point $y\neq z$ est déterminé par les coordonnées polaires de $\exp_z^{-1}(y)$. Nous noterons encore abusivement ce couple (r,θ) : ce sont les *coordonnées polaires* (ou coordonnées géodésiques) de y.

Pour $\omega\in\Omega_z$, notons $(r(\omega,t),\theta(\omega,t))$ les coordonnées polaires de $\omega(t)$. Prat a alors démontré dans [Pr] :

Theorème 4.2.2 (Prat)**.** *Soit N une variété complète, connexe et simplement connexe dont la courbure sectionnelle est pincée entre deux constantes négatives $-b^2\leq -a^2$. Alors :*

1. *il existe un nombre α tel que $(n-1)a\leq\alpha\leq(n-1)b$ et pour tout $z\in N$, et W_z-presque tout $\omega\in\Omega_x$,*
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}r(\omega,t)=\alpha;$$
2. *pour tout $z\in N$, et W_z-presque tout $\omega\in\Omega_z$, il existe $\theta(\omega,\infty)\in T^1_zN$ tel que :*
$$\lim_{t\to\infty}\theta(\omega,t)=\theta(\omega,\infty).$$

Nous résumons en disant qu'un chemin Brownien est *escorté* par une géodésique. L'idée présente dans [L1] est que l'on peut, grâce à une mesure de Gibbs, décrire précisément le comportement statistique des géodésiques qui escortent un chemin Brownien, rapprochant ainsi l'étude ergodique du mouvement Brownien, de l'étude des états de Gibbs pour les flots d'Anosov. C'est cette idée que nous voulons exploiter ici.

Classe harmonique. Nous pouvons alors nous intéresser à la distribution de sortie du mouvement Brownien. Plus précisément lorsque $z\in N$, la fonction $\phi_z:\Omega_z\to S_\infty$, $\omega\mapsto\lim_{t\in\infty}\omega(t)$ (où la limite est prise dans la topologie conique) est bien définie W_z-preque partout, et nous pouvons via cette fonction pousser la mesure de Wiener : nous obtenons ainsi une mesure w_z sur S_∞ qui décrit la distribution asymptotique des chemins Browniens partant de z. Dans [Su2], Sullivan a prouvé :

Theorème 4.2.3 (Sullivan)**.** *Soit N une variété Riemannienne complète connexe et simplement connexe, dont la courbure sectionnelle est pincée entre deux constantes négatives.*

1. *Les mesures w_z, $z \in N$ sont toutes équivalentes entre elles. La classe de mesure ainsi définie sera appelée classe harmonique.*
2. *La classe harmonique charge tout ouvert non vide de S_∞. Mieux : quand z tend vers ξ dans la topologie conique, w_z converge vers δ_ξ.*

Noyau de Poisson et représentation intégrale. Nous définissons le *noyau de Poisson* de N comme la dérivée de Radon-Nikodym :

$$k(z_1, z_2; \xi) = \frac{dw_{z_2}}{dw_{z_1}}(\xi). \tag{4.2.1}$$

Lorsque N est le disque hyperbolique, ce noyau coïncide avec le noyau de Poisson que nous avions défini dans le paragraphe précédent. Il est caractérisé par les propriétés suivantes ($z \in N$ et $\xi \in N(\infty)$) :

$$k(z, z; \xi) = 1, \quad \Delta k(z, .; \xi) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{z_2 \to \xi} k(z_1, z_2; \xi') = 0 \quad \text{quand} \quad \xi' \neq \xi.$$

Dans [AS], Anderson et Schoen livrent une étude très précise de ce noyau, et prouvent les théorèmes clés suivants.

Theorème 4.2.4. *Fixons deux points $o, z \in N$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\xi, \xi' \in N(\infty)$,*

$$|k(o, z; \xi) - k(o, z; \xi')| \leq \angle_x(\xi, \xi')^\alpha.$$

Ainsi, puisque k est lisse en les deux premières variables, nous avons une dépendance Hölder de k avec des constantes uniformes dans $K_1 \times K_2 \times N(\infty)$, où K_i sont des parties compactes de N. Le second résultat donne une représentation intégrale, aussi appelée *représentation de Poisson*, des fonctions harmoniques positives de N.

Theorème 4.2.5. *Soit N une variété Riemannienne complète, connexe et simplement connexe dont la courbure sectionnelle est pincée entre deux constantes négatives. Soit h une fonction harmonique positive sur N, et $o \in N$ un point fixé. Alors il existe une unique mesure de Borel finie η_o sur $N(\infty)$ telle que pour tout $z \in N$,*

$$h(z) = \int_{N(\infty)} k(o, z; \xi)\, d\eta_o(\xi).$$

Remarque. La propriété de la moyenne des fonctions harmoniques entraîne que la masse totale de m_o est égale à $h(o)$.

2.2 – Classe harmonique et flot géodésique

Mesres sur les variétés invariantes. Le résultat suivant est dû à Ledrappier [L1]. C'est un analogue du théorème 2.1.7 pour le potentiel donné par :

$$H(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log k(c_v(0), c_v(t); c_v(-\infty)),$$

où c_v est la géodesique dirigée par v, à la différence que nous ne demandons par que N soit un revêtement Riemannien d'une variété compacte, mais seulement des bornes uniformes sur la courbure, ainsi, ce n'est pas une conséquence directe de ce cas. Par projection de la classe harmonique sur les horosphères et multiplication par une fonction convenable, Ledrappier a prouvé le résultat suivant.

Theorème 4.2.6. *Soit N une variété Riemannienne complète, connexe et simplement connexe et dont la courbure sectionnelle est pincée entre deux constantes négatives. Il existe alors deux familles de mesures $(\widetilde{\lambda}^u_{H,v})_{v\in T^1N}$ et $(\widetilde{\lambda}^{cu}_{H,\xi})_{\xi\in N(\infty)}$ définies respectivement sur les feuilles instables faibles et fortes telles que :*

1. *pour tout $v \in T^1N$, $\widetilde{\lambda}^u_{H,v}$ est équivalente à la projection sur $W^u(v)$ de la classe harmonique ;*
2. *$\widetilde{\lambda}^u_{H,v}$ est indépendante du choix de v sur une feuille instable donnée ;*
3. *nous avons les relations d'équivariance suivantes pour tout $\gamma \in \mathrm{Isom}^+(M)$, $v \in T^1N$, et $\xi \in N(\infty)$: $\gamma * \widetilde{\lambda}^u_{H,v} = \widetilde{\lambda}^u_{H,D\gamma v}$, et $\gamma * \widetilde{\lambda}^{cu}_{H,\xi} = \widetilde{\lambda}^{cu}_{H,\gamma\xi}$;*
4. *nous avons la propriété de quasi-invariance par le flot géodésique suivante :*
$$\frac{d\left[G_T * \widetilde{\lambda}^u_{H,G_{-T}(v)}\right]}{d\widetilde{\lambda}^u_{H,v}}(w) = k(c_w(-t), c_w(0); c_w(-\infty)) \tag{4.2.2}$$
où $v \in T^1N$, $w \in W^u(v)$, et c_w désigne la géodésique dirigée par w ;
5. *pour tout $v \in T^1N$ avec $c_v(-\infty) = \xi$, la mesure $\widetilde{\lambda}^{cu}_{H,\xi}$ s'obtient par intégration des $\lambda^u_{H,G_t(v)}$ contre l'élément dt élément du flot : en particulier, cette mesure vérifie la relation (4.2.2).*

Les classes des mesures $\lambda^\star_{H,v}$, $\star = u, cu$ seront appelées les classes harmoniques sur les variété (centre)-instables.

Continuité absolue. Nous aurons besoin de la propriété suivante d'absolue continuité du feuilletage stable.

Theorème 4.2.7. *Soit N une variété Riemannienne complète, connexe et simplement connexe dont la courbure est pincée entre deux constantes négatives. Alors les transformations d'holonomie stable préservent la classe harmonique des variétés centre-instables. Plus précisément, définissons, pour $v, w \in T^1N$ dans la même variété stable,*
$$k^s_H(v,w) = \exp\left[\int_0^\infty (H\circ G_t(w) - H\circ G_t(v))\,dt\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{k(c_w(0), c_w(T); c_w(-\infty))}{k(c_v(0), c_v(T); c_v(-\infty))}. \tag{4.2.3}$$
Alors :

1. *$k^s_H(v,w)$ est bien définie pour tout v, w appartenant à la même variété stable ;*
2. *pour tous v_0 et w_0 appartenant à la même variété stable, on a, pour tout $w \in W^{cu}(w_0)$,*
$$\frac{d\left[\mathrm{hol}^s_{v_0\to w_0} * \lambda^{cu}_{H,v_0}\right]}{d\lambda^{cu}_{H,w_0}}(w) = k^s_H(w, \mathrm{hol}^s_{w_0\to v_0}).$$
3. *il existe des constantes de Hölder uniformes C et α telles que lorsque v et w appartiennent à la même variété stable avec $\mathrm{dist}_s(v,w) \le 1$, $\log k^s_H(v,w) \le C\mathrm{dist}_s(v,w)^\alpha$;*

Preuve. Premièrement, l'intégrale donnée par la formule (4.2.3) existe par le lemme de distorsion usuel 6.1.5, car le le potentiel H est uniformément Hölder (avec des constantes ne dépendant que de la borne de la courbure) : voir le théorème 4.2.4.

La continuité absolue a été prouvée dans [L1]. Pour avoir l'expression du Jacobien, il s'agit de reproduire l'argument usuel de l'absolue continuité du feuilletage stable : voir la preuve du théorème 5.5.4. Puisque les constantes d'Anosov, et de Hölder du noyau ne dépendent que du pincement de la courbure, les contrôles de distorsion usuels (voir par exemple les lemmes 3.3 et 3.6 du livre de Mañé [Man]) se prouvent de la même façon : en particulier, l'expression du Jacobien k^s_H en découle, ainsi que les constantes de Hölder de son logarithme (voir la fin du théorème 3.1 dans [Man]). □

3 | Mesures harmoniques et mesures de Gibbs pour le flot géodésique feuilleté

Dans tout ce qui suit, nous considèrerons donc $(M, \mathscr{F})$ une variété close feuilletée dont toutes les feuilles sont courbées négativement. Nous savons alors que par compacité de M, les courbures sectionnelles des feuilles sont uniformément pincées entre deux constantes négatives $-b^2 \leq -a^2$. De même, les rayons d'injectivité des feuilles sont uniformément minorés, ainsi, nous pouvons choisir un bon atlas feuilleté $\mathscr{A} = (U_i, \phi_i)$ dont toutes les plaques trivialisent le revêtement universel des feuilles.

Nous aimerions commencer cette section par un petit rappel. Une mesure harmonique m a une désintégration locale dans une carte feuilletée U_i :

$$m_{|U_i} = h_i(z,x)\mathrm{Leb}_{|P_i(x)}(z)d\nu_i(x).$$

La famille de mesure $(\nu_i)_{i\in I}$ est quasi-invariante par holonomie, et nous avons les relations de cocycle suivantes :

$$\frac{d[\tau_{ij}^{-1} * \nu_j]}{d\nu_i}(x) = \frac{h_i(z,x)}{h_j(z,\tau_{ij}(x))}. \tag{4.3.4}$$

Nous rappelons, encore une fois, que grâce au lemme de Ghys 1.3.3, nous pouvons étendre les densités harmoniques locales à toute une feuille typique :

Lemme 4.3.1. *Soit m une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$. Alors il y a un ensemble de Borel saturé et de mesure pleine $\mathscr{X}_0 \subset M$ tel que pour tout $y \in \mathscr{X}_0$, si $y \in P_{i_0}(x) \subset U_{i_0}$, pour un certain indice $i_0 \in I$, et $x \in T_{i_0}$, la formule suivante définit une fonction harmonique de $z \in L_y$:*

$$H_x(z) = \frac{d[\tau_c^{-1} * \nu_i]}{d\nu_{i_0}}(x)h_i(z,\tau_c(x)), \tag{4.3.5}$$

où i est tel que $z \in U_i$, et c est n'importe quel chemin joignant x et z.

3.1 – Relevé canonique des mesures harmoniques

Mesures ∞-harmoniques. Soit L une feuille de $\mathscr{F}$, dont le revêtement universel Riemannien est noté $\widetilde{L}$. Nous fixons un point base $o \in \widetilde{L}$. Le feuilletage centre-instable $\widetilde{\mathscr{W}}^{cu}$ de $T^1\widetilde{L}$ est paramétré par $\widetilde{L}(\infty)$: nous avons déjà vu qu'il s'identifie au feuilletage trivial $(\widetilde{L} \times \{\xi\})_{\xi \in \widetilde{L}(\infty)}$. Il est ainsi possible d'associer à chaque feuille centre-instable $\widetilde{L} \times \{\xi_0\}$ la mesure ξ_0-harmonique pour $\widetilde{\mathscr{W}}^{cu}$ définie par :

$$m_{\xi_0} = k(o,z;\xi_0)\mathrm{Leb}_{\widetilde{L}\times\{\xi_0\}}(z).$$

Définition 4.3.2. *Une mesure m^+ sur $T^1\widetilde{L}$ est appelée ∞-harmonique pour $\widetilde{W}^{cu}$ si ses mesures conditionnelles dans les feuilles centre-instables sont données par les m_ξ, $\xi \in N(\infty)$.*

Si L' est un quotient de $\widetilde{L}$ par un sous-groupe d'isométries directes, la mesure quotient d'une mesure ∞-harmonique pour $\widetilde{W}^{cu}$ sur T^1L' sera encore appelée ∞-harmonique pour le feuilletage centre-instable quotient.

Lemme 4.3.3. *La projection sur $\widetilde{L}$ d'une mesure ∞-harmonique sur $T^1\widetilde{L}$ a une densité harmonique par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Preuve. Considérons une mesure ∞-harmonique $\widetilde{m}^+$, obtenue en intégrant les mesures m_ξ contre une mesure de Borel finie η_o sur $\widetilde{L}(\infty)$. Puisque toutes les feuilles centre-instables sont isométriques à $\widetilde{L}$, et puisque chaque m_ξ a une densité par rapport à Lebesgue, nous déduisons que la projection $\widetilde{m}^+$ a encore une densité par rapport à Lebesgue.

De plus, cette densité est obtenue par intégration des $k(o,.;\xi)$ contre η_o : c'est une fonction harmonique, et le lemme est prouvé. □

Nous rappelons que le fibré unitaire tangent $T^1\mathscr{F}$ est feuilleté par les fibrés unitaires tangents aux feuilles de $\mathscr{F}$, et ce feuilletage, noté $\widehat{\mathscr{F}}$, est lui-même sous-feuilleté par le feuilletage centre-instable $\mathscr{W}^{cu}$ du flot géodésique feuilleté.

Définition 4.3.4. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée avec une métrique feuilletée. Supposons que toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ soient courbées négativement. Une mesure de probabilité m^+ sur $T^1\mathscr{F}$ est dite ∞-harmonique pour $\mathscr{W}^{cu}$ si ses mesure conditionnelles dans les plaques de $\widehat{\mathscr{F}}$ sont ∞-harmonique pour $\mathscr{W}^{cu}$.*

Avant d'énoncer la proposition suivante, nous introduisons trois notations :
– la projection canonique le long des sphères tangentes au feuilletage $pr : T^1\mathscr{F} \to M$;
– $\mathscr{H}ar(\mathscr{F})$ désigne l'ensemble des mesures harmoniques pour $\mathscr{F}$;
– $\mathscr{H}ar_\infty(\mathscr{W}^{cu})$ désigne celui des mesures ∞-harmoniques pour $\mathscr{W}^{cu}$.

Le fait que l'ensemble $\mathscr{H}ar_\infty(\mathscr{W}^{cu})$ n'est pas vide n'est pas évident à priori. Il découle en fait de la proposition suivante qui donne une section $\mathscr{H}ar(\mathscr{F}) \to \mathscr{H}ar_\infty(\mathscr{W}^{cu})$ (ainsi que du fait que les mesures harmoniques existent par Garnett).

Proposition 4.3.5. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée dont les feuilles sont courbées négativement. Soit $\mathscr{A} = (U_i,\phi_i)_{i\in I}$ un bon atlas feuilleté pour $\mathscr{F}$, et $\mathscr{T}$ une transversale complète associée. Alors :*

1. *si m^+ est une mesure ∞-harmonique pour $\mathscr{W}^{cu}$, sa projection $pr * m^+$ est une mesure harmonique ;*
2. *si m est une mesure harmonique, il y a une mesure m^+ qui est ∞-harmonique et se projette sur m (en particulier, elle induit la même mesure que m sur $\mathscr{T}$) : nous appelons cette mesure le relevé canonique de m.*

En d'autre termes, l'application $pr_* : \mathscr{H}ar_\infty(\mathscr{W}^{cu}) \to \mathscr{H}ar(\mathscr{F})$ qui associe à une mesure ∞-harmonique m^+ sa projection sur M, $pr * m^+$ est bien définie et a une section donnée par le relevé canonique.

Preuve. Nous choisissons un bon atlas feuilleté $\mathscr{A} = (U_i,\phi_i)_{i\in I}$ pour $\mathscr{F}$, tel que lorsque nous le tirons en arrière par la fibration, nous obtenons encore un bon atlas feuilleté pour $\widehat{\mathscr{F}}$, dont les cartes $\widehat{U}_i$ sont trivialement feuilletées par les sphères tangentes au feuilletages, et trivialisent le feuilletage centre instable du flot géodésique feuilleté.

Le fait que l'application pr_* soit bien définie, ou si l'on préfère que la projection sur M d'une mesure ∞-harmonique pour $\mathscr{W}^{cu}$ soit harmonique, vient du lemme 4.3.3 appliqué aux plaques de $\mathscr{F}$.

À présent, montrons comment relever une mesure harmonique au fibré unitaire tangent. Parce que les mesures harmoniques peuvent être décomposées en composantes ergodiques, nous n'avons qu'à montrer comment relever les mesures harmoniques ergodiques. Soit alors m une mesure harmonique ergodique, et $\widehat{m}$, la mesure qu'elle induit sur la transversale complète $\mathscr{T}$. Il existe alors un indice $i_0 \in I$ tel que la saturation de T_{i_0} par $\mathscr{F}$ soit de mesure pleine. En d'autres termes, presque toute feuille rencontre la transversale T_{i_0}.

Ainsi, par le lemme 4.3.1, il y a un ensemble Borélien saturé $\mathscr{X} \subset M$ qui est de mesure pleine pour m, telles que toutes les feuilles passant par un point de $\mathscr{X}$ intersecte T_{i_0}, et telle que pour tout $y \in \mathscr{X}$, la densité harmonique définie sur la plaque correspondante puisse être étendue à toute la feuille.

Soit $x_0 \in T_{i_0} \cap \mathscr{X}$: la formule (4.3.5) définit une fonction harmonique $H_{x_0} : L_{x_0} \to (0,\infty)$. Nous pouvons la relever au revêtement universel Riemannien $\widetilde{L_{x_0}}$ (nous fixons une préimage o de x_0) en une fonction harmonique $\widetilde{H}_{x_0}$. Les plaques P_i trivialisent le revêtement universel : tout h_i peut être relevé en une fonction harmonique $\widetilde{h_i}$ d'une section $\widetilde{P_i} \subset \widetilde{L}_{x_0}$. Par le lemme 4.3.1, si c est un chemin reliant x_0 et la plaque P_i, si $\widetilde{P_i}(c)$ est le relevé correspondant, alors la formule $\widetilde{H}_{x_0} = \widetilde{h_i} d[\tau_c^{-1} * \nu_i]/d\nu_{i_0}(x_0)$, a lieu en restriction à $\widetilde{P_i}(c)$.

Le théorème 4.2.5 fournit une mesure η_o sur $\widetilde{L}_{x_0}(\infty)$ telle que $\widetilde{H}_{x_0}(z) = \int_{L_{x_0}(\infty)} k(o,z;\xi) d\eta_o(\xi)$. Il est alors possible de relever la mesure $\widetilde{H}_{x_0}$ Leb à $T^1\widetilde{L}_{x_0}$ en considérant la mesure obtenue par intégration contre η_o des mesures m_ξ, définies sur les feuilles instables, identifiées avec $\widetilde{L}_{x_0} \times \{\xi\}$. Par projection sur $T^1L_{x_0}$, nous obtenons une mesure définie sur tout le fibré unitaire tangent à L_{x_0}, que l'on note $m^+_{x_0}$, et qui lorsqu'on la pousse par pr, se projette sur H_{x_0} Leb.

Nous pouvons à présent choisir $y \in L_{x_0} \cap \mathscr{T}$: il y a un indice $i \in I$ tel que $y \in T_i$. Nous pouvons définir la mesure $m^+_{i,y}$ sur la plaque $T^1P_i(y)$ en divisant la restriction de $m^+_{x_0}$ à $T^1P_i(y)$ par la dérivée $d[\tau_c^{-1}\nu_i]/d\nu_{i_0}(x_0)$, où c est un chemin joignant x_0 et y.

Une autre application du lemme 4.3.1 montre que cette mesure ne dépend pas du choix de point base x_0, dans le sens que si $x_1 \in T_{i_0} \cap L_{x_0}$, nous avons :

$$\left(\frac{d[\tau_c^{-1} * \nu_i]}{d\nu_i}(x_0)\right)^{-1} (m^+_{x_0})_{|T^1P_i(y)} = \left(\frac{d[\tau_c^{-1} * \nu_i]}{d\nu_i}(x_1)\right)^{-1} (m^+_{x_1})_{|T^1P_i(y)},$$

où c et c' sont n'importe quels chemins joignant respectivement x_0 et x_1 à y. De plus, la mesure $m^+_{i,y}$ se projette sur $h_i(.,y)\mathrm{Leb}_{P_i(y)}$ quand nous la poussons sur la plaque $P_i(y)$.

Supposons que $m(U_i \cap U_j) \neq \emptyset$, et que $y \in \mathrm{dom}(\tau_{ij})$. Nous avons alors pour tout $v \in T^1P_i(y) \cap T^1P_j(\tau_{ij}(y))$,

$$\frac{dm^+_{i,y}}{dm^+_{j,\tau_{ij}(y)}}(v) = \frac{d[\tau_{ij}^{-1} * \nu_j]}{d\nu_i}(y), \tag{4.3.6}$$

de sorte que nous serons capables de recoller ensemble ces mesures de façon cohérente avec l'holonomie.

Finalement, presque toute feuille rencontre T_{i_0} : ainsi la construction ci-dessus donne pour $\widehat{m}$-presque tout $y \in \mathscr{T}$ une mesure sur $T^1P_i(y)$ (si $y \in T_i$), qui ne dépend que de i et de y. Ainsi, pour tout $i \in I$ tel que $m(U_i) > 0$, nous obtenons, par intégration contre ν_i des mesures $m^+_{i,y}$, une mesure m_i sur $\widehat{U}_i$. À cause de la relation (4.3.6), nous voyons que ces mesures peuvent être recollées ensemble, définissant ainsi une mesure m^+.

Par définition, la mesure induite par m^+ sur $\mathscr{T}$ est exactement $\widehat{m}$. De plus, puisque chacune des mesures conditionnelles de m^+ dans les plaques de $\mathscr{F}$ sont ∞-harmoniques et se projettent sur celles de m, nous concluons que m^+ est ∞-harmonique pour $\mathscr{W}^{cu}$ et qu'elle se projette sur m. □

Remarque. Afin de prouver que l'application $pr_* : \mathscr{H}ar_\infty(\mathscr{W}^{cu}) \to \mathscr{H}ar(\mathscr{F})$ est une bijection, il reste à prouver qu'elle est injective. Comme nous l'avons indiqué plus haut, une preuve de ce fait peut être adaptée à partir de la preuve de [BMar] dans le cas des laminations par surfaces hyperboliques, et reposerait sur un argument analytique basé sur l'unicité de la représentation intégrale 4.2.5. Nous proposons une autre preuve qui est plus dans l'esprit de ce travail de thèse. Nous prouverons ce fait, qui n'est pas si évident a priori, que deux différentes mesures ∞-harmoniques pour $\mathscr{W}^{cu}$ induisent des mesures différentes sur les transversales de $\widehat{\mathscr{F}}$: et ainsi se projettent sur des mesures harmoniques différentes. C'est un argument basé sur une variation de l'argument de Hopf et sur la propriété d'absolue continuité 4.2.7 : mais nous avons tout d'abord besoin de la notion de mesure de H-Gibbs pour expliquer cela.

3.2 – Mesures de H-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté

Maintenant que nous savons relever canoniquement les mesures harmoniques au fibré unitaire tangent, la prochaine étape est un reparamétrage de ces mesures dans la direction instable de façon à obtenir une mesure invariante par le flot géodésique feuilleté qui possède la propriété de Gibbs.

Mesures de H-Gibbs. Nous avons montré comment construire une famille de mesures, que nous notons $(\lambda^u_{H,v})_{v\in T^1\mathscr{F}}$ sur les feuilles instables de G_t qui vérifient la relation de cocycle (4.2.2). Notons qu'il y a également une famille de mesures définie sur les feuilles centre-instables, et notée $(\lambda^{cu}_{H,v})_{v\in T^1\mathscr{F}}$: ces mesures sont obtenues par intégration des $\lambda^u_{H,G_t(v)}$ contre l'élément dt du flot.

Définition 4.3.6. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée de sorte que les feuilles soient courbées négativement. Une mesure de probabilité μ sur $T^1\mathscr{F}$, sera appelée mesure de H-Gibbs pour G_t, si elle vérifient les propriétés suivantes :*

- *μ est invariante par G_t ;*
- *μ a une désintégration absolument continue par rapport à $(\mathscr{W}^u,\lambda^u_{H,v})$.*

Nous voudrions aussi rappeler que ces mesures sont associées au potentiel suivant :

$$H(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log k_{L(v)}(c_v(0), c_v(t); c_v(-\infty)),$$

où $L(v)$ est la feuille à laquelle v est tangent, $k_{L(v)}$ est le noyau de Poisson sur $\widetilde{L(v)}$, et c_v est la géodésique dirigée par v.

Theorème 4.3.7. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée de sorte que les feuilles soient courbées négativement.*

1. *Pour tout $v \in T^1\mathscr{F}$, et tout disque $D \subset \overline{W}^u_{loc}(v)$, les points d'accumulation de*
$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{G_t * (\lambda^u_{H,v})_{|D}}{\lambda^u_{H,v}(D)} dt$$
sont des mesures de H-Gibbs pour G_t.

2. *Les composantes ergodiques d'une mesure de H-Gibbs pour G_t sont encore des mesures de H-Gibbs.*

3. *Si μ est une mesure de H-Gibbs pour G_t, alors les densités locales de $\psi^u_{H,v}$ sur les variétés instables locales sont uniformément log-bornées et vérifient :*
$$\frac{\psi^u_{H,v_0}(v)}{\psi^u_{H,v_0}(w)} = k_{L(v)}(c_w(0), c_v(0); c_v(-\infty))$$

Preuve. Ce théorème d'existence se prouve exactement comme le théorème 6.1.2 que nous prouverons plus loin : nous avons la relation de cocycle (4.2.2), le feuilletage uniformément dilaté par le flot, et les constantes de Hölder uniformes du potentiel dans les feuilles. □

Mesure induite sur une transversale complète. Il est vrai que deux mesures de H-Gibbs qui induisent le même système de mesures sur un système complet de transversales au feuilletage instable sont égales. Il est plus intéressant de noter, et c'est l'objet de la proposition suivante, qu'une mesure de H-Gibbs est en fait déterminée par le système de mesures qu'elle induit sur une transversale complète au feuilletage $\widehat{\mathscr{F}}$.

Afin de prouver ce fait, nous proposons d'utiliser un argument à la Hopf où l'ingrédient principal est la propriété d'absolue continuité 4.2.7. Nous avons choisi un bon atlas feuilleté $\mathscr{A}$, que nous avons tiré en arrière par la fibration. Nous pouvons supposer que les plaques de l'atlas relevé possèdent la structure de produit local. Nous appelons $\mathscr{T}$ une transversale complète associée.

Proposition 4.3.8. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée de sorte que les feuilles soient courbées négativement. Alors :*

1. *toute mesure de H-Gibbs pour G_t induit sur $\mathscr{T}$ une mesure qui est quasi-invariante par le pseudogroupe d'holonomie de $\widehat{\mathscr{F}}$;*
2. *deux mesures de H-Gibbs différentes pour G_t induisent des mesures différentes sur $\mathscr{T}$.*

Preuve. Soit μ une mesure de H-Gibbs pour G_t. Nous avons choisi l'atlas $\mathscr{A}$ de sorte que toutes les plaques de l'atlas $\widehat{\mathscr{A}}$ possèdent la structure de produit local. Ainsi, nous obtenons un système complet de transversales pour $\mathscr{W}^u$ en considérant les $T_i^{cs} = \bigcup_{x\in T_i} W_{loc}^{cs}(x)$. Par construction des mesures de H-Gibbs μ (voir le théorème 4.3.7), elles induisent un système de mesures ν_i^{cs} sur les transversales T_i^{cs} sont la classe est invariante par holonomie instable.

La projection de μ sur T_i le long des feuilles de $\mathscr{F}$, notée ν_i, coïncide alors avec celle de ν_i^{cs} le long des feuilles centre-stables. À présent, choisissons deux cartes U_i et U_j dont l'intersection a une mesure positive pour μ, ou, cela revient au même, telles que le domaine de τ_{ij} soit positif pour ν_i. Dans ce cas, si $A \subset T_i$ vérifie $\nu_i(A) > 0$, nous avons $\nu^{cs}(\overline{A}) > 0$ où $\overline{A}$ est le saturé, à l'intérieur de T_i^{cs}, de A dans la direction centre-stable. Comme nous l'avons fait remarquer, $\nu_j^{cs}(\mathrm{hol}^u_{T_i^{cs}\to T_j^{cs}}(\overline{A})) > 0$. Par projection le long de la direction centre-stable, nous avons $\nu_j(\tau_{ij}(A)) > 0$, ce qui prouve que ν_i et $\tau_{ji} * \nu_j$ sont dans la même classe de mesure. Par récurrence, nous prouvons que le pseudogroupe d'holonomie (engendré par les τ_{ij}) préserve cette classe de mesures transverses.

À présent, nous devons prouver que les mesures induites sur $\mathscr{T}$ par deux mesures de H-Gibbs différents sont également différentes. Puisque toute composante ergodique d'une mesure de H-Gibbs est encore une mesure de H-Gibbs, cela revient à prouver que deux mesures ergodiques différentes (et donc singulières) induisent des mesures singulières sur $\mathscr{T}$.

Considérons deux mesures de H-Gibbs ergodiques μ_1 et μ_2 et supposons que les mesures qu'elles induisent sur $\mathscr{T}$, notées $\widehat{\mu}_1$ et $\widehat{\mu}_2$, ne soient pas singulières. Soit $\mathscr{X}$ l'ensemble des vecteurs $v \in T^1\mathscr{F}$ tels que pour toute fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$, nous ayons :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f\circ G_t(v)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f\circ G_{-t}(v)\,dt = \int_M f\,d\mu_1.$$

Par le théorème ergodique de Birkhoff, nous savons que $\mu_1(\mathscr{X}) = 1$: si nous notons $\widehat{X}$ l'union des projections de $\mathscr{X} \cap \widehat{U}_i$ sur les transversales T_i, nous avons par définition, $\widehat{\mu}_1({}^c\widehat{X}) = 0$. Puisque nous avons supposé que les mesures n'étaient pas singulières, nous avons $\widehat{\mu}_2(\widehat{X}) > 0$.

Soit alors $i \in I$ tel que $\widehat{\mu}_2(\widehat{X}_i) > 0$, où $\widehat{X}_i = \widehat{X} \cap T_i$. Il existe donc un ensemble $\mathscr{Y} \subset \widehat{U}_i$, positif pour μ_2, qui se projette sur $\widehat{X}_i$ le long des plaques. Par ergodicité de μ_2, nous pouvons supposer que pour tout $w \in \mathscr{Y}$, et toute fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$, nous ayons :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f\circ G_t(w)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f\circ G_{-t}(w)\,dt = \int_M f\,d\mu_2.$$

Prenons un élément de $\widehat{X}_i$, que nous identifions à une plaque de $\widehat{\mathscr{F}}$ notée $\widehat{P}_i$. Puisque μ_1 et μ_2 ont une désintégration absolument continue par rapport à $(\mathscr{W}^{cu}, \lambda^{cu}_{H,v})_{v\in T^1\mathscr{F}}$, nous pouvons trouver deux vecteurs $v \in \mathscr{X} \cap \widehat{P}_i$, et $w \in \mathscr{Y} \cap \widehat{P}_i$ tels que $\lambda^{cu}_{H,v}$-presque tout élément de $W^{cu}_{loc}(v)$ appartienne à $\mathscr{X}$, et que $\lambda^{cu}(\mathscr{Y} \cap W^{cu}_{loc}(w)) > 0$.

Projetons l'intersection $\mathscr{Y} \cap W^{cu}_{loc}(w)$ sur $W^{cu}_{loc}(v)$ le long du feuilletage stable : par la propriété d'absolue continuité 4.2.7, cette projection a une mesure positive pour $\lambda^{cu}_{H,v}$ dans $W^{cu}_{loc}(v)$ et intersecte donc $\mathscr{X}$. En résumé, nous avons l'existence de $w' \in \mathscr{Y}$ et $v' \in \mathscr{X}$ dans la même variété stable. Ainsi, pour toute fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f\circ\Phi_t(v')dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f\circ\Phi_t(w')dt.$$

Par définition, la première limite est égale à $\int_M f d\mu_1$, et la seconde à $\int_M f d\mu_2$: ces deux intégrales sont donc égales, et ce pour toute fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$. Cela entraîne en particulier l'égalité des deux mesures. □

Reparamétrage du relevé canonique. Dans la proposition 4.3.5, nous avons défini le relevé canonique m^+ de toute mesure harmonique m. Nous associons à m une mesure de H-Gibbs par reparamétrage de m^+ le long des variétés centre-instables, qui consistera à échanger la mesure de Lebesgue et la mesure $\lambda^{cu}_{H,v}$.

Lemme 4.3.9. *Soit L une feuille de $\mathscr{F}$, et $\xi_0 \in \widetilde{L}(\infty)$. La mesure suivante définie sur la feuille instable correspondant à $\widetilde{L}\times\{\xi_0\}$ est invariante par le flot géodésique G_t, et a une désintégration absolument continue par rapport à $(\widetilde{\mathscr{W}}^u, \widetilde{\lambda}^u_{H,\xi})$:*

$$\mu_{\xi_0} = k(o,z;\xi_0)\widetilde{\lambda}^{cu}_{H,\xi_0}(z).$$

Preuve. L'invariance par le flot est une consiquence immédiate de la formule (4.2.2). Puisque $\widetilde{\lambda}^{cu}_{H,\xi}$ est obtenue par intégration de $\widetilde{\lambda}^u_{H,G_t(v)}$ contre l'élement dt du flot, cette mesure a une désintégration continue par rapport à $(\widetilde{\mathscr{W}}^{cu}, \widetilde{\lambda}^{cu}_{H,\xi})$. □

Proposition 4.3.10. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilleté dont les feuilles sont courbées négativement. Alors, pour toute mesure ∞-harmonique pour $\mathscr{W}^{cu}$ m^+, il existe une unique mesure de H-Gibbs μ qui induit sur la transversale complète $\mathscr{T}$ la même mesure que m^+.*

Réciproquement, pour toute mesure de H-Gibbs μ, il existe une unique mesure ∞-harmonique pour $\mathscr{W}^{cu}$ qui induit sur la transversale complète $\mathscr{T}$ la même mesure que m^+.

Preuve. L'atlas feuilleté $\widehat{\mathscr{A}}$ trivialise le feuilletage centre-instable. Les plaques centre-instables de cet atlas sont notées Q_i, et les transversales, S_i. L'union disjointe des S_i donne une transversale complète pour $\mathscr{W}^{cu}$, notée $\mathscr{S}$, qui peut être vue comme feuilletée trivialement en sphères $\bigsqcup_{x\in\mathscr{T}} T^1_x L$, où $\mathscr{T}$ est une transversale complète pour $\mathscr{F}$.

La mesure m^+ est par définition obtenue dans une carte $\widehat{U}_i$ par intégration contre une mesure ν'_i définie sur S_i, de mesures qui sont données par les m_ξ correspondants.

Au lieu d'intégrer contre ν'_i les mesures m_ξ, intégrons les mesures μ_ξ définies dans le lemme 4.3.9 contre ν'_i et appelons μ_i la mesure sur U_i ainsi obtenue.

D'une part, ces mesures μ_i sont invariantes par le flot géodésique feuilleté, et ont une désintégration absolument continue par rapport à $(\mathscr{W}^u, \lambda^u_{H,v})$ parce qu'il en est ainsi de chaque μ_ξ (voir le lemme 4.3.9).

D'autre part, pour $v \in T^1\mathscr{F}$, la mesure $\lambda^{cu}_{H,v}$ est, comme la mesure de Lebesgue, bien définie sur *toute* la variété centre-instable de v. Ainsi, comme les mesures m_j^+, les mesures μ_j peuvent être recollées ensemble, et la mesure que l'on obtient alors, notée μ, est invariante par le flot G_t, et a une désintégration absolument continue par rapport à $(\mathscr{W}^u, \lambda^u_{H,v})$. C'est une mesure de H-Gibbs, et par construction, elle induit la même mesure transverse que m^+ sur la transversale complète $\mathscr{S}$, ce qui entraîne deux choses.

D'abord, puisque $\mathscr{S}$ est un feuilletage trivial en sphères paramétré par $\mathscr{T}$: m^+ et μ induisent la même mesure sur $\mathscr{T}$.

Enfin, puisqu'une mesure ∞-harmonique est caractérisée par la mesure qu'elle induit sur $\mathscr{S}$, deux mesures ∞-harmoniques différentes donnent des mesures de H-Gibbs différentes : et on a l'unicité.

Afin de prouver la réciproque, il s'agit de reprendre l'argument à l'envers. □

Ainsi, puisque nous savons que deux mesures de H-Gibbs différentes induisent sur $\mathscr{T}$ deux mesures différentes (voir la proposition 4.3.8), il en est de même pour deux mesures ∞-harmoniques pour $\mathscr{W}^{cu}$ différentes. Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 4.3.11. *L'application* $pr_* : \mathscr{H}ar_\infty(\mathscr{W}^{cu}) \to \mathscr{H}ar(\mathscr{F})$ *est injective.*

Fin de la preuve du théorème 4.2.1. Nous sommes alors prêts à prouver le théorème 4.2.1, plus précisément, nous prouvons :

Theorème 4.3.12. *Soit* $(M, \mathscr{F})$ *une variété feuilletée close dont toutes les feuilles sont courbées négativement. Alors pour toute mesure harmonique pour* $\mathscr{F}$*, il existe une unique mesure de* H*-Gibbs pour* G_t *induisant la même mesure sur une transversale complète* $\mathscr{T}$ *pour* $\mathscr{F}$*.*

Réciproquement, pour toute mesure de H*-Gibbs pour* G_t*, il y a une unique mesure harmonique pour* $\mathscr{F}$ *qui induit la même mesure sur la transversale* $\mathscr{T}$*.*

Preuve. Les propositions 4.3.5 et 4.3.11 montrent que pour toute mesure harmonique pour $\mathscr{F}$, il y a une unique mesure ∞-harmonique pour $\mathscr{W}^{cu}$ induisant la même mesure sur $\mathscr{T}$, et réciproquement.

La proposition 4.3.10 montre que pour toute mesure ∞-harmonique pour $\mathscr{W}^{cu}$, il y a une unique mesure de H-Gibbs pour G_t induisant la même mesure sur $\mathscr{T}$, et réciproquement.

La preuve du théorème suit donc. □

Chapitre V

États de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté

1 | Hyperbolicité feuilletée

1.1 – Définition

Flots hyperboliques feuilletés. Le concept général d'hyperbolicité feuilletée a été introduit dans le travail de Bonatti, Gómez-Mont et Martínez [BGM]. Ils l'explorent du point de vue de la théorie de Pesin dans le cadre des feuilletages transversalement conformes, en lien avec le travail de Deroin et Kleptsyn [DK].

Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, et munie d'une métrique Riemannienne feuilletée. Soit X un champ de vecteurs continu et Φ_t le flot associé . On dit que ce champ est *hyperbolique feuilleté* si :
- X est tangent aux feuilles de $\mathscr{F}$;
- X est C^2 (on pourrait demander $C^{1+\eta}$), en restricion aux feuilles ;
- X varie continûment dans la topologie C^2 avec le paramètre transverse ;
- il y a une décomposition continue du fibré tangent au feuilletage en trois sous-fibrés $T\mathscr{F} = E^s \oplus E^u \oplus E^c$, telle que $E^c = \mathbb{R}X$, et E^s, et E^u sont respectivement appelés fibrés stable et instable, et sont uniformément contracté et dilaté par l'action du flot, c'est-à-dire qu'il existe des constantes uniformes $C_s, C_u > 0$, et $\chi_u > 0$, $\chi_s < 0$, telles que

$$\begin{cases} ||D\Phi_t(v_s)|| \leq C_s e^{t\chi_s}||v_s|| & \text{si } v_s \in E^s \text{ et } t > 0 \\ ||D\Phi_{-t}(v_u)|| \leq C_u e^{-t\chi_u}||v_u|| & \text{si } v_u \in E^u \text{ et } t > 0 \end{cases}. \tag{5.1.1}$$

Cette notion a un parfum d'hyperbolicité partielle : la direction transverse au feuilletage jouerait alors le rôle de la direction centrale. Néanmoins, il y a une différence de taille : la dynamique du flot dans la direction transverse au feuilletage n'a aucune raison d'être dominée par la contraction et l'expansion présents respectivement dans les fibrés stable et instable, alors que c'est une hypothèse nécessaire en dynamique partiellement hyperbolique.

Le flot géodésique feuilleté. Nous allons ici demander que toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ soient courbées négativement. Puisque la géométrie des feuilles est uniformément bornée (M est compacte), cela entraîne l'existence de constantes uniformes $-b^2 \leq -a^2 < 0$ bornant respectivement inférieurement et supérieurement les courbures sectionnelles de toutes les feuilles. Nous avons vu que la métrique de Sasaki feuilletée est une métrique feuilletée, et qu'en conséquence, il y a des sous-fibrés E^s et E^u continus sur M tels que :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b}e^{-bt}||v_s|| \leq ||DG_t(v_s)|| \leq \dfrac{b}{a}e^{-at}||v_s|| & \text{si } v_s \in E^s \text{ et } t > 0 \\ \\ \dfrac{a}{b}e^{-bt}||v_u|| \leq ||DG_{-t}(v_u)|| \leq \dfrac{b}{a}e^{-at}||v_u|| & \text{si } v_u \in E^u \text{ et } t > 0. \end{cases}$$

C'est donc un exemple de flot hyperbolique feuilleté. C'est, avec les relevés de flots d'Anosov à des fibrés feuilletés comme nous le verons ultérieurement, d'ailleurs le seul que nous soyons en mesure de présenter.

1.2 – Les variétés stables et instables

Théorème de la variété stable. La méthode usuelle de transformation de graphe peut être adaptée au cadre feuilleté pour prouver que les fibrés stable et instable forts d'un flot hyperboliques feuilleté sont uniquement intégrables (voir [BGM]). Les variétés intégrales forment ce que l'on appelle les feuilletages stables et instables forts, qui sous-feuillettent $\mathscr{F}$. Peut-être devrions-nous les appeler feuilletages stables ou instables *feuilletés*, ou à la rigueur, sous-feuilletages stables et instables, puisque nous ne savons a priori rien de ce qui se passe dans la direction transverse à $\mathscr{F}$: deux points de feuilles différentes pourraient aisément être asymptotiques dans le futur ou dans le passé. Pour ne pas alourdir la présentation, nous choisissons de conserver la terminologie usuelle de la dynamique uniformément hyperbolique.

Theorème 5.1.1. *Si Φ_t est un flot hyperbolique feuilleté, alors pour tout $x \in M$, il existe deux plongements de classe C^2 de disques de dimensions respectives* $\dim E^s$ *et* $\dim E^u$ *dans la feuille de x, que nous noterons $W^s_{loc}(x)$ et $W^u_{loc}(x)$, et que nous appellerons respectivement variétés stable et instable locales de x tels que :*

1. *$T_x W^\star_{loc}(x) = E^\star(x)$ pour $\star = s, u$;*
2. *pour tout $t \leq 0$, $\Phi_t(W^s_{loc}(x)) \subset W^s_{loc}(\Phi_t(x))$ et $\Phi_{-t}(W^u_{loc}(x)) \subset W^u_{loc}(\Phi_{-t}(x))$;*
3. *il y a des variétés globales immergées qui sous-feuillettent $\mathscr{F}$ définies par :*

$$W^s(x) = \bigcup_{t\leq 0} \Phi_{-t}(W^s_{loc}(\Phi_t(x)))$$

$$W^u(x) = \bigcup_{t\leq 0} \Phi_t(W^u_{loc}(\Phi_{-t}(x))).$$

De plus les variétés stables et instables locales varient continûment avec le point x dans la topologie C^2, et les variétés invariantes globales sont caractérisées par les propriétés dynamiques suivantes :

$$W^s(x) = \{y \in L_x;\ \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_{\mathscr{F}}(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = 0\}$$

$$W^u(x) = \{y \in L_x;\ \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_{\mathscr{F}}(\Phi_{-t}(x), \Phi_{-t}(y)) = 0\}.$$

Nous noterons en particulier que les variétés invariantes globales ne dépendent pas du choix des variétés locales.

Sous-feuilletages invariants et la structure de produit local. Les deux collections $(W^s(x))_{x\in M}$ et $(W^u(x))_{x\in M}$ forment ce que l'on appelle les *feuilletages stable and instable (forts)*, et on les notera $\mathscr{W}^s$ and $\mathscr{W}^u$.

Lorqu'il y a une ambiguïté, c'est-à-dire lorsqu'on considère un fibré feuilleté paramétré par une métrique Riemannienne d'une base possédant un flot d'Anosov, ainsi que le flot hyperbolique feuilleté défini en relevant le flot par la fibration (voir le chapitre VI), il sera d'usage de noter $\mathscr{W}^s$ et $\mathscr{W}^u$ les feuilletages invariants de la base, et $\overline{\mathscr{W}}^s$ et $\overline{\mathscr{W}}^u$ ceux du flot feuilleté.

Les variétés centre-stables et centre-instables d'un point x seront notées $W^{cs}(x)$ et $W^{cu}(x)$ et sont par définition les saturations de $W^s(x)$ et $W^u(x)$ dans la direction du flot. Ces variétés forment deux sous-feuilletages de $\mathscr{F}$ notés respectivement $\mathscr{W}^{cs}$ et $\mathscr{W}^{cu}$ que l'on appelle les feuilletages *centre-stable* et *centre-instable*.

Si $\delta > 0$ est suffisamment petit, nous introduirons parfois la notation $W^\star_\delta(x)$ pour l'intersection de la boule incluse dans L_x centrée en x et de rayon δ et de $W^\star(x)$ (where $\star = s, u, cs, cu$). La notation $W^\star_{loc}(x)$ sera réservée pour une variété locale "de rayon suffisamment petit". La proposition suivante montre comment munir les feuilles de $\mathscr{F}$ d'une structure de produit local uniformément Hölder.

Proposition 5.1.2. *Il existe deux nombres $0 < \delta < \gamma < 2\delta$ tels que pour tout couple de points x et y appartenant à la même feuille L et distants d'au plus γ, la variété centre-stable locale de x et la variété instable locale de y de taille δ se coupent transversalement en un unique point noté $[x, y]$:*

$$W^{cs}_\delta(x) \pitchfork W^u_\delta(y) = [x, y].$$

De plus, la coordonnée $[.,.]$ dépend Hölder continûment de x et y avec des constantes de Hölder uniformes.

La dépendance uniformément Hölder de la structure de produit local dans les feuilles, ainsi que la continuité dans la direction transverse, seront prouvés dans l'appendice : voir la proposition 5.5.3.

La notation suivante sera commode à utiliser. Si $x \in M$ et $A_i \subset W^i_\delta$, nous notons :

$$[A_u, A_{cs}] = \{[x_u, x_{cs}] | x_u \in A_u, x_{cs} \in A_{cs}\}.$$

De plus, le rectangle $[W^u_\delta(x), W^{cs}_\delta(x)]$ sera noté $\mathscr{R}_x$.

1.3 – Continuité absolue et structure de produit local du volume dans les feuilles

Continuité absolue. Nous montrerons en appendice comment adapter le preuve usuelle de l'absolue continuité des feuilletages invariants des flots d'Anosov à notre cadre hyperbolique feuilleté. Il suffit de voir que les contrôles de distorsion sont encore valables dans ce cadre, et ceci, même si les feuilles sont non compactes, se voit en utilisant la compacité de la variété ambiante, ainsi que la continuité transverse de la métrique, et de la dynamique. Nous donnerons néanmoins tous les détails dans la suite.

Theorème 5.1.3. *Soit Φ_t un flot hyperbolique feuilleté sur une variété close feuilletée $(M, \mathscr{F})$. Les transformations d'holonomies le long des feuilletages invariants sont absolument continus, et leurs Jacobiens sont uniformément log-Hölder.*

Propriété de produit local du volume. Soit $x \in M$. Le volume induit respectivement sur la variété instable (resp. centre-stable) de x sera notée Leb^u_x (resp. Leb^{cs}_x). Nous pouvons construire une mesure m_x sur le rectangle $\mathscr{R}_x$ en imposant pour tous ensembles de Borel $A^u \subset W^u_\delta(x)$ et $A^{cs} \subset W^{cs}_\delta(x)$ la relation :

$$m_x[A^u, A^{cs}] = \mathrm{Leb}^u_x(A^u)\mathrm{Leb}^{cs}_x(A^{cs}).$$

C'est exactement la même chose que de demander que m_x soit, dans le rectangle $\mathscr{R}_x$, obtenu :

- par intégration contre Leb^{cs}_x des mesures $\mathrm{hol}^{cs}_{x\to z} * \mathrm{Leb}^u_x$;
- par intégration contre Leb^u_x des mesures $\mathrm{hol}^u_{x\to y} * \mathrm{Leb}^{cs}_x$.

Par absolue continuité des mesures, nous trouvons les formules équivalentes suivantes pour un Borélien quelconque $A \subset \mathscr{R}_x$:

$$m_x(A) = \int_{W^{cs}_\delta(x)} \left[\int_{A\cap W^u(z)} \mathrm{Jac}\,\mathrm{hol}^{cs}_{z\to x}(\zeta)\, d\mathrm{Leb}^u_z(\zeta)\right] d\mathrm{Leb}^{cs}_x(z) \tag{5.1.2}$$

$$= \int_{W^u_\delta(x)} \left[\int_{A\cap W^{cs}(z)} \mathrm{Jac}\,\mathrm{hol}^u_{y\to x}(\zeta)\, d\mathrm{Leb}^{cs}_y(\zeta)\right] d\mathrm{Leb}^u_x(y). \tag{5.1.3}$$

La fonction qui associe à $x \in M$ l'angle entre $E^u(x)$ et $E^{cs}(x)$, que nous appelons $\alpha(x)$ est, et tout comme les fibrés, Hölder le long des feuilles (voir le théorème 5.5.1).

Le but de ce paragraphe est de prouver la proposition suivante, qui est une application directe de l'absolue continuité des feuilletages invariants :

Proposition 5.1.4. *Les deux mesures* Leb_{L_x} *and* m_x *sont équivalentes dans* $\mathscr{R}_x$ *avec une dérivée de Radon-Nikodym :*

$$\frac{dm_x}{d\mathrm{Leb}_{L_x}}(y) = \frac{1}{\sin\alpha(y)} \mathrm{Jac\,hol}^u_{y\to x}(y)\,\mathrm{Jac\,hol}^{cs}_{y\to x}(y).$$

Nous divisons la preuve de cette proposition en deux lemmes.

Lemme 5.1.5. *La quantité suivante existe pour tout x :*

$$\frac{dm_x}{d\mathrm{Leb}_{L_x}}(x) = \frac{1}{\sin\alpha(x)}.$$

Preuve. Nous noterons $B_{\mathscr{F}}(x,r)$ la boule de centre x et de rayon r tangente à la feuille de x. Nous écrivons :

$$m_x(B_{\mathscr{F}}(x,r)) = \int_{W^{cs}_r(x)} \left[\int_{B_{\mathscr{F}}(x,r)\cap W^u(z)} \mathrm{Jac\,hol}^{cs}_{z\to x}(\zeta)\, d\mathrm{Leb}^u_z(\zeta)\right] d\mathrm{Leb}^{cs}_x(z).$$

À présent, lorsque r tend vers zéro, nous savons que :

- le Jacobien de l'application exponentielle $\exp_x : T_xL_x \to L_x$ tend vers 1 : nous pouvons donc supposer que nous travaillons dans l'espace euclidien T_xL_x avec presque aucune distorsion de volume ;
- par continuité du Jacobien de l'holonomie centre-stable, $\mathrm{Jac\,hol}^{cs}_{z\to x}$ est uniformément proche de 1 lorsque $z \in W^{cs}_r(x)$;
- le Jacobien de l'inverse de l'application exponentielle $(\exp^{cs})^{-1}_x : W^{cs}_r(x) \to E^{cs}(x)$ tend vers 1 de sorte que l'intégrale précédente peut être supposée prise sur une boule euclidienne de rayon r dans $E^{cs}(x)$;
- par continuité du feuilletage instable, les Jacobiens de chacune des applications $(\exp^u)^{-1}_z$: $W^u_r(z) \to E^u(z)$ sont proches de 1, et l'angle que font les espace $E^u(z)$ et $E^{cs}(x)$ est proche de celui que font les espaces $E^u(x)$ et $E^{cs}(x)$, c'est-à-dire $\alpha(x)$: avec très peu de distorsion, nous pouvons supposer que ces tranches sont parallèles.

Considérons alors, dans T_xL_x, la structure euclidienne que l'on obtient en rendant $E^u(x)$ et $E^{cs}(x)$ orthogonales, ainsi que le volume correspondant. Ce dernier a une densité $1/\sin\alpha(x)$ par rapport au volume usuel.

Par les considérations ci-dessus, ainsi que par le théorème de Fubini, l'intégrale précédente est équivalente, lorsque le rayon r tend vers zéro, au poids donné par la boule par ce volume modifié.

En passant à la limite, on trouve donc :

$$\lim_{r\to 0} \frac{m_x(B_{\mathscr{F}}(x,r))}{\mathrm{Leb}_{L_x}(B_{\mathscr{F}}(x,r))} = \frac{1}{\sin\alpha(x)}.$$

□

Lemme 5.1.6. *Supposons que* x, y *appartiennent à la même feuille, et que* $\mathscr{R}_x$ *et* $\mathscr{R}_y$ *se coupent. Alors* m_x *et* m_y *sont équivalentes sur* $\mathscr{R}_x \cap \mathscr{R}_y$*. Plus précisément, si* $\zeta \in \mathscr{R}_x \cap \mathscr{R}_y$*, et si nous notons,* $\zeta^u_y = [y,\zeta] \in W^u_{loc}(y)$ *et* $\zeta^{cs}_y = [\zeta, y] \in W^{cs}_{loc}(y)$*, alors :*

$$\frac{dm_x}{dm_y}(\zeta) = \mathrm{Jac\,hol}^u_{y\to x}(\zeta^u_y)\mathrm{Jac\,hol}^{cs}_{y\to x}(\zeta^{cs}_y).$$

Preuve. Supposons que x, y vérifient les hypothèses de la proposition. Soit $\zeta \in \mathscr{R}_x \cap \mathscr{R}_y$, $\zeta_y^u = [y,\zeta]$, $\zeta_y^{cs} = [\zeta, y]$ et considérons deux petits disques $D^u \subset W_\delta^u(y)$ et $D^{cs} \subset W_\delta^{cs}(y)$ de même rayon et centrés respectivement en ζ_y^u et ζ_y^{cs}. Le rectangle $D = [D^u, D^{cs}]$ est un ouvert contenant ζ. De plus, puisque l'angle selon lequel se coupent les variétés instables et centre-instables est uniformément borné, et puisque les applications d'holonomie instable et centre-stable sont uniformément Hölder, lorsque le rayon commun des disques D^u, et D^{cs} converge vers zéro, ce rectangle D reste pincé entre deux boules Riemanniennes dont les rayons sont en rapport uniformément borné. Nous pouvons donc utiliser le théorème de densité de Lebesgue et prouver :

$$\begin{aligned}\frac{m_x(D)}{m_y(D)} &= \frac{\mathrm{Leb}_x^u(\mathrm{hol}_{y\to x}^u(D^u))}{\mathrm{Leb}_y^u(D^u)}\frac{\mathrm{Leb}_x^{cs}(\mathrm{hol}_{y\to x}^{cs}(D^{cs}))}{\mathrm{Leb}_y^{cs}(D^{cs})}\\ &\longrightarrow \mathrm{Jac}\,\mathrm{hol}_{y\to x}^u(\zeta_y^u)\mathrm{Jac}\,\mathrm{hol}_{y\to x}^{cs}(\zeta_y^{cs})\end{aligned}$$

quand le rayon commun de D^u et D^{cs} tend vers 0. Ceci conclut donc la preuve du lemme. □

Preuve de la proposition 5.1.4. Nous pouvons à présent conclure la preuve de la proposition 5.1.4. Si $y \in \mathscr{R}_x$, alors :

$$\frac{m_x(B_{\mathscr{F}}(y,r))}{\mathrm{Leb}_{L_x}(B_{\mathscr{F}}(y,r))} = \frac{m_y(B_{\mathscr{F}}(y,r))}{\mathrm{Leb}_{L_x}(B_{\mathscr{F}}(y,r))}\frac{m_x(B_{\mathscr{F}}(y,r))}{m_y(B_{\mathscr{F}}(y,r))}.$$

Lorsque r tend vers 0, le premier facteur converge vers $\sin\alpha(y)^{-1}$ par le premier lemme, et le second, vers $\mathrm{Jac}\,\mathrm{hol}_{y\to x}^u(y)\mathrm{Jac}\,\mathrm{hol}_{y\to x}^{cs}(y)$ (puisqu'ici $\zeta = y$, nous avons $\zeta_y^u = \zeta_y^{cs} = y$). La preuve de la proposition est maintenant achevée. □

2 | États de su-Gibbs et mesures transverses invariantes

2.1 – États de u-Gibbs en hyperbolicité feuilletée

Existence et propriétés. Dans leur travail non publié [BGM], Bonatti, Gómez-Mont et Martínez définissent et étudient les états de u-Gibbs pour les flots hyperboliques feuilletés, et, en utilisant les résultats de Deroin et Kleptsyn [DK], et un précédent travail de Martínez [Ma], Bakhtin-Martínez [BMar], généralisé au chapitre IV, ils obtiennent leur unicité pour le flot géodésique feuilleté, dans le contexte des feuilletages transversalement conformes par surfaces hyperboliques sans mesure transverse invariante.

Définition 5.2.1. *Soit Φ_t un flot hyperbolique feuilleté sur une variété close feuilletée $(M,\mathscr{F})$. Un état de u-Gibbs pour Φ_t est une mesure de probabilité sur M qui est invariante par le flot, et qui a une désintégration équivalente à Lebesgue dans les feuilles instables.*

De façon analogue, un état de s-Gibbs pour Φ_t est un état de u-Gibbs pour Φ_{-t} : il a une désintégration équivalente à Lebesgue dans les feuilles stables.

Un état de su-Gibbs pour Φ_t est une mesure de probabilité qui est à la fois un état de u-Gibbs et un état de s-Gibbs pour Φ_t.

Comme dans le cas des flots d'Anosov, l'existence d'états de u-Gibbs repose sur un contrôle de distorsion classique. Le Jacobien du flot dans la direction instable est, nous le rappelons, défini par :

$$\mathrm{Jac}^u\Phi_t(x) = |\det(D\Phi_t|E^u(x))|.$$

Puisque la dérivée du flot est uniformément C^1 le long des feuilles, et puisque le fibré E^u est uniformément Hölder dans les feuilles, le Jacobien instable du temps 1 du flot est uniformément Hölder dans les feuilles. En conséquence, en suivant les lignes du théorème 6.1.2, on trouve le théorème suivant :

Theorème 5.2.2. *Soit Φ_t un flot hyperbolique feuilleté sur une variété close feuilletée $(M,\mathscr{F})$. Alors :*

1. *pour tout disque instable $D \subset W^u_{loc}(x)$, tout point d'accumulation de la famille de mesures suivantes, indexée par $T \in [0,\infty)$, est un état de u-Gibbs :*

$$\mu_T = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_t * \left(\frac{\mathrm{Leb}^u_{|D^u}}{\mathrm{Leb}^u(D^u)}\right) dt,$$

dont les densités locales, notées ψ^u_y sont uniformément log-bornées et vérifient, pour $z_1, z_2 \in W^u_{loc}(y)$:

$$\frac{\psi^u_y(z_2)}{\psi^u_y(z_1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Jac}^u \Phi_{-t}(z_2)}{\mathrm{Jac}^u \Phi_{-t}(z_1)} \tag{5.2.4}$$

2. *toute composante ergodique d'un état de u-Gibbs est encore un état de u-Gibbs, de plus les densités dans les plaques instables de cette composante ergodique sont uniformément log-bornées et vérifient la relation (5.2.4) ;*
3. *tout état de u-Gibbs est une mesure dont les densités dans les plaques instables sont uniformément log-bornées et vérifient la relation (5.2.4).*

Remarque 1. Nous pouvons toujours nous arranger pour avoir $\psi^u_y(y) = 1$. Plus précisément, considérons un état de u-Gibbs pour un flot hyperbolique feuilleté Φ_t, ainsi qu'une carte feuilletée de la forme

$$U = \bigcup_{x\in T} \mathscr{R}_x.$$

Nous noterons μ_x la mesure conditionnelle de μ sur $\mathscr{R}_x$. Par unicité dans le théorème de désintégration de Rokhlin, et puisque les densités locales sont uniformément log-bornée, il existe une unique mesure ν^{cs}_x sur $W^{cs}_{loc}(x)$ qui ait une densité uniformément log-bornée par rapport à la projection de μ_x sur $W^{cs}_{loc}(x)$, et telle que l'on puisse écrire la désintégration suivante dans les variétés instables locales :

$$\mu_x = \left(\psi^u_y \mathrm{Leb}^u_y\right) \nu^{cs}_x(y), \tag{5.2.5}$$

où $\psi^u_y(y) = 1$.

Remarque 2. Une mesure μ invariante par le flot induit l'élément de longueur dt sur les lignes de flot. Ainsi, tout état de u-Gibbs pour Φ_t est un état de cu-Gibbs : il possède une désintégration équivalente à Lebesgue dans les feuilles centre-instables $W^{cu}(x)$. Il existe ainsi des densités ψ^{cu}_y, qui coïncident avec ψ^u_y dans la variété instable locale de y (et en particulier, $\psi^{cu}_y(y) = 1$), telles que nous ayons la désintégration suivante :

$$\mu_x = \left(\psi^{cu}_y \mathrm{Leb}^{cu}_y\right) \nu^s_x(y).$$

Les densités locales sont alors déterminées par la relation suivante : si $\zeta \in W^{cu}_{loc}(y)$, et si τ est tel que $\Phi_{-\tau}(\zeta) \in W^u_{loc}(y)$, alors :

$$\psi^{cu}_y(\zeta) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Jac}^u \Phi_{-t-\tau}(\zeta)}{\mathrm{Jac}^u \Phi_{-t}(y)}.$$

Mesures induites sur les transversales. En reproduisant le raisonnement que nous avons développé dans la preuve de la proposition 4.3.8 (voir le chapitre IV), et qui était basé sur l'absolue de continuité du feuilletage stable, nous pouvons donner la :

Proposition 5.2.3. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, et Φ_t un flot hyperbolique feuilleté. Soit $\mathscr{A}=(U_i,\phi_i)_{i\in I}$ un atlas feuilleté pour $\mathscr{F}$, et $\mathscr{T}$ la transversale complète correspondante. Alors :*

1. *tout état de u-Gibbs induit sur $\mathscr{T}$ une mesure qui est quasi-invariante par le pseudogroupe d'holonomie de $\mathscr{F}$;*
2. *deux états de u-Gibbs différents induisent des classes de mesures différentes sur $\mathscr{T}$;*

2.2 – Une condition suffisante pour l'existence d'une mesure transverse invariante

Le but principal de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant :

Theorème 5.2.4. *Soit Φ_t un flot hyperbolique feuilleté sur une variété feuilleté close $(M,\mathscr{F})$, qui préserve la mesure de Lebesgue dans les feuilles. Supposons que Φ_t possède un état de su-Gibbs μ. Alors $\mathscr{F}$ possède une mesure transverse invariante par holonomie.*

Considérons un atlas feuilleté dont les cartes ont la forme $U=\bigcup_{x\in T}\mathscr{R}_x$, ainsi qu'un point $x\in T$.

Identifier les densités. Dans la suite, nous supposons que Φ_t est un flot hyperbolique feuilleté possédant un état de su-Gibbs noté μ. En particulier, il existe des mesures ν_x^{cs} sur $\mathscr{W}_{loc}^{cs}$, ainsi que ν_x^u sur W_{loc}^u telles que μ_x se désintègre ainsi dans $\mathscr{R}_x$:

$$\begin{aligned}\mu_x &= (\psi_z^u \operatorname{Leb}_z^u)\,\nu_x^{cs}(z)\\ &= (\psi_y^{cs}\operatorname{Leb}_y^{cs})\,\nu_x^u(y).\end{aligned}$$

Le lemme suivant est une application immédiate de l'absolue continuité des feuilletages invariants.

Lemme 5.2.5. *Les mesures ν_x^{cs} et ν_x^u sont respectivement équivalentes par rapport à $\operatorname{Leb}_x^{cs}$ et Leb_x^u.*

Preuve. Nous n'allons prouver que le fait que les mesures ν_x^u sont équivalentes par rapport à Leb_x^u. Premièrement, par la remarque 1, la projection de μ_x sur $W_{loc}^u(x)$ le long du feuilletage centre-stable est équivalente à ν_x^u. Il suffit donc de prouver le lemme pour cette mesure.

Puisque μ est un état de u-Gibbs, il a une désintégration équivalente à Lebesgue dans les feuilles instables. Ainsi, par l'absolue continuité des applications d'holonomie $\operatorname{hol}_{z\to x}^{cs}$ avec $z\in W_{loc}^{cs}(x)$, la projection le long du feuilletage centre-stable sur $W_{loc}^u(x)$ des mesures condionnelles de μ_x dans les variétés stables locales sont équivalentes à Lebesgue. Nous pouvons donc conclure. □

Une conséquence de ce lemme, est l'existence de deux fonctions positives $f:W_{loc}^u(x)\to(0,\infty)$ et $g:W_{loc}^{cs}(x)\to(0,\infty)$ telles que les désintégrations de μ_x puissent être écrites :

$$\begin{aligned}\mu_x &= \left(\psi_z^u\, d\operatorname{Leb}_z^u\right) g(z)\,d\operatorname{Leb}_x^{cs}(z)\\ &= \left(\psi_y^{cs}\, d\operatorname{Leb}_y^{cs}\right) f(y)\,d\operatorname{Leb}_x^u(y).\end{aligned}$$

Lemme 5.2.6. *La mesure μ_x est équivalente à m_x dans $\mathscr{R}_x$. Plus précisément, si $\zeta \in \mathscr{R}_x$, $y = [\zeta, x]$, $z = [x, \zeta]$, et F représente la dérivée de Radon-Nikodym $d\mu_x/dm_x$, alors :*

$$\frac{F(\zeta)}{F(x)} = \psi_x^{cs}(z)\,\psi_z^{u}(\zeta)\frac{\mathrm{Jachol}^{cs}_{z\to x}(z)}{\mathrm{Jachol}^{cs}_{z\to x}(\zeta)} \tag{5.2.6}$$

$$= \psi_x^{u}(y)\,\psi_y^{cs}(\zeta)\frac{\mathrm{Jachol}^{u}_{y\to x}(y)}{\mathrm{Jachol}^{u}_{y\to x}(\zeta)}. \tag{5.2.7}$$

Preuve. Rappelons-nous que les désintégrations de m_x sont données dans les variétés stables locales sont données par la relation (5.1.2), et dans les variétés centre-instables locales, par la relation (5.1.3). Ainsi, nous avons pour tout $\zeta \in \mathscr{R}_x$, si $y = [\zeta, x]$ et $z = [x, \zeta]$,

$$\frac{d\mu_x}{dm_x}(\zeta) = \frac{\psi_z^{u}(\zeta)}{\mathrm{Jachol}^{cs}_{z\to x}(\zeta)} g(z) \tag{5.2.8}$$

$$= \frac{\psi_y^{cs}(\zeta)}{\mathrm{Jachol}^{u}_{y\to x}(\zeta)} f(y). \tag{5.2.9}$$

En particulier, nous prouvons ainsi que :

$$g(x) = f(x) = \frac{d\mu_x}{dm_x}(x).$$

En séparant les variables, il vient :

$$\frac{g(z)}{f(y)} = \frac{\psi_y^{cs}(\zeta)\mathrm{Jachol}^{cs}_{z\to x}(\zeta)}{\psi_z^{u}(\zeta)\mathrm{Jachol}^{u}_{y\to x}(\zeta)},$$

cette identité étant vérifiée pour tout $\zeta \in \mathscr{R}_x$. Si l'on choisit $\zeta \in W^{cs}_\delta(x)$, nous avons alors $\zeta = z$ and $y = x$. En remplaçant dans l'égalité précédente, nous avons donc :

$$\frac{g(z)}{f(x)} = \psi_x^{cs}(z)\mathrm{Jachol}^{cs}_{z\to x}(z);$$

Nous obtenons donc la relation (5.2.6) pour la densité normalisée en injectant la dernière égalité dans (5.2.8). Dans le même esprit, en choisissant $\zeta \in \mathscr{W}^{u}_\delta(x)$, puis en injectant l'égalité ainsi obtenue dans (5.2.9), nous obtenons la relation (5.2.7). □

Theorème 5.2.7. *La mesure μ_x est équivalente à la mesure de Lebesgue. Mieux, si $G = d\mu_x/d\mathrm{Leb}_{L_x}$, alors pour tout $\zeta \in \mathscr{R}_x$ on a, si $y = [\zeta, x]$, $z = [x, \zeta]$, et si $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ sont tels que $\Phi_{\tau_1}(y) \in W^s_{loc}(\zeta)$, et $\Phi_{\tau_2}(z) \in W^s_{loc}(x)$:*

$$\frac{G(\zeta)}{G(x)} = \lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}\,\Phi_{-T}(y)}{\mathrm{Jac}\,\Phi_{-T}(x)}\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}\,\Phi_{T}(\zeta)}{\mathrm{Jac}\,\Phi_{T+\tau_1}(y)} \tag{5.2.10}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}\,\Phi_{-T}(\zeta)}{\mathrm{Jac}\,\Phi_{-T}(z)}\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}\,\Phi_{T+\tau_2}(z)}{\mathrm{Jac}\,\Phi_{T}(x)}. \tag{5.2.11}$$

Preuve. Lebesgue-presque partout, nous avons $d\mu_x/d\mathrm{Leb} = (d\mu_x/dm_x) \times (dm_x/d\mathrm{Leb})$. Nous obtenons donc la densité G en faisant le produit des deux densités qui sont données par le lemme précédent, ainsi que par la proposition 5.1.4. En faisant le produit, nous trouvons les deux formules suivantes pour exprimer localement la densité :

$$\begin{aligned}\frac{G(\zeta)}{G(x)} &= \frac{\sin\alpha(x)}{\sin\alpha(\zeta)}\psi^u_x(y)\,\psi^{cs}_y(\zeta)\mathrm{Jac\,hol}^{cs}_{\zeta\to x}(\zeta)\,\mathrm{Jac\,hol}^u_{y\to x}(y)\\ &= \frac{\sin\alpha(x)}{\sin\alpha(\zeta)}\psi^{cs}_x(z)\,\psi^u_z(\zeta)\mathrm{Jac\,hol}^u_{\zeta\to x}(\zeta)\,\mathrm{Jac\,hol}^{cs}_{z\to x}(z),\end{aligned}$$

lorsque $\zeta\in\mathscr{R}_x$, et $y=[\zeta,x]$, $z=[x,\zeta]$, et où α représente l'angle entre les fibrés E^u et E^{cs}.

À présent, revenons aux formules exprimant les densités locales des états de Gibbs, ainsi que des Jacobiens des holonomies stables et instables faibles. Ces formules nous donnent par exemple :

$$\psi^u_x(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}^u\,\Phi_{-T}(y)}{\mathrm{Jac}^u\,\Phi_{-T}(x)},$$

ainsi que :

$$\mathrm{Jac\,hol}^u_{y\to x}(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}^{cs}\,\Phi_{-T}(y)}{\mathrm{Jac}^{cs}\,\Phi_{-T}(x)}.$$

En se plaçant dans une base formée de vecteurs de E^u et E^{cs}, il vient que pour tout y, et tout $T>0$, on a :

$$\mathrm{Jac}\,\Phi_{-T}(y)=\frac{\sin\alpha(\Phi_{-T}(y))}{\sin\alpha(y)}\mathrm{Jac}^u\,\Phi_{-T}(y)\mathrm{Jac}^{cs}\,\Phi_{-T}(y).$$

Puisque l'angle α est, comme les fibrés, uniformément Hölder dans les feuilles de $\mathscr{F}$, nous avons, lorsque x et y sont sur la même variété instable, que $\lim_{T\to\infty}\sin(\alpha(\Phi_{-T}(y)))/\sin(\alpha(\Phi_{-T}(x)))=1$. Pour conclure, nous avons, pour x et y sur la même variété instable locale :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}\,\Phi_{-T}(y)}{\mathrm{Jac}\,\Phi_{-T}(x)}=\frac{\sin\alpha(x)}{\sin\alpha(y)}\psi^u_x(y)\mathrm{Jac\,hol}^u_{y\to x}(y).$$

Nous prouvons de même que si y est sur la même variété centre-stable locale que ζ, et si τ_1 est tel que $\Phi_{\tau_1}(y)\in W^s_{loc}(\zeta)$, alors on a l'égalité :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}\,\Phi_T(\zeta)}{\mathrm{Jac}\,\Phi_{T+\tau_1}(y)}=\frac{\sin\alpha(y)}{\sin\alpha(\zeta)}\psi^{cs}_y(\zeta)\mathrm{Jac\,hol}^{cs}_{\zeta\to x}(\zeta).$$

En faisant le produit de ces limites, nous prouvons la formule (5.2.10).

L'autre formule se prouve de manière symétrique. □

Fin de la preuve du théorème 5.2.4. À présent, si l'on suppose que le flot hyperbolique feuilleté préserve le volume dans les feuilles, et possède un état de su-Gibbs μ, nous trouvons que les probabilité conditionnelles dans les plaques de $\mathscr{F}$ ont une densité par rapport au volume qui est constante : puisque si G sont les densités fournies par le théorème 5.2.7, nous trouvons que pour tout x et tout $\zeta\in\mathscr{R}_x$, et $y=[x,\zeta]$:

$$\frac{G(\zeta)}{G(x)}=\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}\,\Phi_T(y)}{\mathrm{Jac}\,\Phi_T(x)}\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}\,\Phi_{-T}(\zeta)}{\mathrm{Jac}\,\Phi_{-T}(y)}=1.$$

Ainsi, en évaluant μ sur l'intersection de deux cartes feuilletées U_i et U_j, supposée de mesure positive, nous trouvons l'égalité des mesures transverses suivante *en restriction au but de l'application d'holonomie* τ_{ij} :

$$\mathrm{Leb}(\mathscr{R}_{\tau_{ij}^{-1}(x)})\tau_{ij}*\nu_i(x)=\mathrm{Leb}(\mathscr{R}_x)\nu_j(x).$$

Ainsi, la mesure $\widehat{\nu}$ sur $\mathscr{T}$ définie en restriction à T_i par $\mathrm{Leb}(\mathscr{R}_x)\nu_i(x)$, est-elle invariante par l'action du pseudogroupe d'holonomie. Cela conclut la preuve du théorème 5.2.4. □

3 | États de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté et mesures ϕ^u-harmoniques

Dans tout ce qui suit, $(M,\mathscr{F})$ désignera une variété feuilletée close dont les feuilles sont courbées négativement. Nous regardons le fibré unitaire tangent $T^1\mathscr{F}$ qui est feuilleté par les fibrés unitaires tangents aux feuilles de $\mathscr{F}$. Le flot géodésique feuilleté, noté G_t est alors un flot hyperbolique feuilleté.

3.1 – Mesures ϕ^u-harmoniques.

Potentiel et noyau. Les états de u-Gibbs sont associés à un potentiel qu'il est d'usage de noter ϕ^u (voir par exemple [BR, Bo2]). Il est défini pour $v \in T^1\mathscr{F}$:

$$\phi^u(v) = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log \mathrm{Jac}^u G_t(v).$$

Le flot géodésique étant de classe C^∞ dans les feuilles, et variant continûment dans la topologie C^∞ avec le paramètre transverse, nous en déduisons que cette fonction est continue dans M, et, comme le fibré instable, varie de façon uniformément Hölder dans les feuilles.

Associé à ce potentiel, il y a un noyau, qui jouera dans la suite le rôle du noyau de Poisson. Soit L une feuille de $\mathscr{F}$, et $\widetilde{L}$ le revêtement universel Riemannien. Nous pouvons relever la restriction $\phi^u_{|T^1L}$ en une fonction $\widetilde{\phi}^u : T^1\widetilde{L} \to \mathbb{R}$. Nous définissons alors sur $\widetilde{L}\times\widetilde{L}\times\widetilde{L}(\infty)$ le noyau suivant :

$$k^u(z_1,z_2;\xi) = \exp\left[\int_\xi^{z_2}\widetilde{\phi}^u - \int_\xi^{z_1}\widetilde{\phi}^u\right],$$

où nous rappelons que la différence des intégrales a la signification suivante. Soit un rayon géodésique c qui est asymptote à ξ, alors la limite suivante existe, et ne dépend pas du choix du rayon c et nous pouvons poser par définition :

$$\int_\xi^{z_2}\widetilde{\phi}^u - \int_\xi^{z_1}\widetilde{\phi}^u = \lim_{T\to\infty}\left(\int_{c(T)}^{z_2}\widetilde{\phi}^u - \int_{c(T)}^{z_1}\widetilde{\phi}^u\right).$$

Lemme 5.3.1. *Pour tout triplet $(z_1,z_2,\xi)\in\widetilde{L}\times\widetilde{L}\times\widetilde{L}(\infty)$, nous avons l'égalité suivante :*

$$k^u(z_1,z_2;\xi) = \lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{Jac}^u G_{-T-\beta_\xi(z_1,z_2)}(v_{\xi,z_2})}{\mathrm{Jac}^u G_{-T}(v_{\xi,z_1})},$$

où v_{ξ,z_i} désigne le vecteur unitaire basé en z_i tel que $\lim_{T\to\infty} G_{-T}(v_{\xi,z_i}) = \xi$.

Il est bien connu que lorsque L est une variété hyperbolique, le potentiel ϕ^u est constant égal à la dimension des horosphères, c'est-à-dire $d-1$, (d étant la dimension des feuilles du feuilletage). Il est aussi bien connu que dans ce cas, le noyau de Poisson sur $\widetilde{L}$ coïncide avec la fonction qui associe à un triplet $(z_1,z_2,\xi)\in\widetilde{L}\times\widetilde{L}\times\widetilde{L}(\infty)$ la quantité :

$$e^{-(d-1)\beta_\xi(z_1,z_2)},$$

où β_ξ représente le cocycle de Busemann en ξ. En conséquence, nous avons la proposition suivante :

Proposition 5.3.2. *Supposons que $\mathscr{F}$ soit un feuilletage par feuilles hyperboliques. Alors pour toute feuille L, le noyau k^u et le noyau de Poisson coïncident.*

Fonctions ϕ^u-harmoniques. Le noyau k^u jouant le rôle du noyau de Poisson, nous pouvons définir une notion de fonction harmonique associée au potentiel ϕ^u.

Définition 5.3.3. *Soit $\widetilde{L}$ une variété complète, connexe et simplement connexe dont la courbure sectionnelle est pincée entre deux constantes négatives. Nous fixons un point base $o \in \widetilde{L}$. Une fonction positive $h : \widetilde{L} \to \mathbb{R}^+$ est dite ϕ^u-harmonique s'il existe une mesure de Borel finie sur $\widetilde{L}(\infty)$, notée η, telle que pour tout $z \in \widetilde{L}$, l'on ait :*

$$h(z) = \int_{\widetilde{L}(\infty)} k^u(o,z;\xi)\,d\eta(\xi).$$

La fonction induite par une fonction ϕ^u-harmonique invariante par un sous-groupe discret d'isométries Γ, sur le quotient de $\widetilde{L}/\Gamma$ est encore appelée ϕ^u-harmonique.

Remarque. La notion de fonction ϕ^u-harmonique est indépendante du choix du point base o : si o' est un autre point de $\widetilde{L}$, si η est une mesure de Borel finie sur $\widetilde{L}(\infty)$, et si h est la fonction ϕ^u-harmonique correspondante, alors on peut écrire pour tout $z \in \widetilde{L}$,

$$h(z) = \int_{\widetilde{L}(\infty)} k^u(o',z;\xi)\,d\eta'(\xi),$$

où $\eta'(\xi) = k^u(o,o';\xi)\eta(\xi)$.

Supposons à présent que $\mathscr{F}$ soit un feuilletage d'une variété close dont toutes les feuilles sont négativement courbées, et que $\widetilde{L}$ soit le revêtement universel Riemannien de l'une d'elles. Bien que la feuille ne soit pas compacte, elle se réalise à l'intérieur d'un feuilletage d'une variété compacte, de sorte que sa géométrie possède une certaine récurrence. En particulier, nous avons vu que les feuilletages (centre-)stable et (centre)-instable sont absolument continus avec des Jacobiens d'holonomies uniformément log-Hölder. Dans ce contexte, nous pouvons prouver la proposition suivante :

Proposition 5.3.4. *Soit L une feuille de $\mathscr{F}$, et $v \in T^1L$ basé en $x \in L$. Nous notons $\theta(v)$ l'angle selon lequel se coupent la variété centre-instable $W^{cu}(v)$ et la fibre unitaire tangente T^1_xL.*

Soit T_1, T_2 deux sections transverses au feuilletage centre-instable $\mathscr{W}^{cu}$ incluses chacune dans une fibre unitaire tangente, telles qu'il y ait une application d'holonomie le long des feuilles centre-instables $\mathrm{hol}^{cu}_{T_1\to T_2} : T_1 \to T_2$, qui soit un homéomorphisme. Alors, pour tout $w \in T_2$ et $w' = \mathrm{hol}^{cu}_{T_2\to T_1}(w) \in T_1$:

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}^{cu}_{T_1\to T_2} * \mathrm{Leb}_{T_1}\right]}{d\mathrm{Leb}_{T_2}}(w) = \frac{\sin\theta(w)}{\sin\theta(w')}k^u(w,w';\xi),$$

où $\xi = c_w(\infty)$.

Ici la notation est abusive : il faut choisir des relevés au revêtement universel des points bases de w et w' dans un même domaine fondamental, et évaluer k^u en ces points.

Preuve. Soit donc T_1, T_2 deux sections transverses à $\mathscr{W}^{cu}$, chacune étant incluse dans une fibre unitaire, et telle qu'il existe une transformation d'holonomie du feuilletage $\mathscr{W}^{cu}$, $\mathrm{hol}^{cu}_{T_1\to T_2} : T_1 \to T_2$, qui soit un homéomorphisme.

Nous savons par absolue continuité du feuilletage centre-instable que la transformation préserve la classe de Lebesgue. Mieux, nous en connaissons le Jacobien. Nous avons, pour tout $w \in T_2$, si l'on pose $w' = \mathrm{hol}^{cu}_{T_2\to T_1}(w)$:

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}^{cu}_{T_1\to T_2} * \mathrm{Leb}_{T_1}\right]}{d\mathrm{Leb}_{T_2}}(w) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Jac}^{T_2} G_{-t-\beta_\xi(w',w)}(w)}{\mathrm{Jac}^{T_1} G_{-t}(w')},$$

où pour tout $v \in T_i$, $\mathrm{Jac}^{T_i} G_t(v)$ désigne la fonction $|\det(DG_t)|$ restreinte à l'espace tangent à T_i en v.

En nous plaçant dans une base formée de vecteurs tangents aux fibres unitaires tangentes, et aux variétés centre-instables, nous pouvons utiliser l'invariance par le flot géodésique de la mesure de Liouville pour prouver que l'on a pour tout $w \in T_2$, et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$1 = \frac{\sin\theta_t(G_t(w))}{\sin\theta(w)} \mathrm{Jac}^{T_1} G_t(w) \mathrm{Jac}^{cu} G_t(w),$$

où θ_t représente l'angle selon lequel se coupent en $G_t(w)$ la variété centre-instable $W^{cu}(G_t(w))$, et l'image $G_t(T_2)$. Remarquons aussi que puisque le flot géodésique est orthogonal aux variétés instables et agit par isométrie le long des orbites, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Jac}^{cu} G_t(w) = \mathrm{Jac}^{u} G_t(w)$.

Nous remarquons également, que lorsque $t \to \infty$, l'angle $\theta_{-t}(G_{-t}(w))$ s'approche de plus en plus de l'angle selon lequel se coupent en $G_{-t}(w)$ les variétés stable et centre-instables de w. En particulier, par Hölder-continuité des fibrés stables et centre-instables, nous avons , lorsque $w' = \mathrm{hol}^{cu}_{T_2\to T_1}(w)$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin\theta_{-t}(G_{-t}(w'))}{\sin\theta_{-t-\beta_\xi(w',w)}(G_{-t-\beta_\xi(w',w)}w)} = 1.$$

En conséquence, nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Jac}^{T_2} G_{-t-\beta_\xi(w',w)}(w)}{\mathrm{Jac}^{T_1} G_{-t}(w')} &= \frac{\sin\theta(w)}{\sin\theta(w')} \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Jac}^{u} G_{-t}(w')}{\mathrm{Jac}^{u} G_{-t-\beta_\xi(w',w)}(w)} \\
&= \frac{\sin\theta(w)}{\sin\theta(w')} k^u(w,w';\xi).
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure la preuve de la proposition. □

Ainsi, si nous définissons sur chaque sphère unitaire tangente $T^1_x\mathscr{F}$, $x \in M$, la mesure ω_x dont la dentité par rapport à la mesure de Lebesgue est donnée par $\sin\theta(v)$, $v \in T^1_x\mathscr{F}$, alors on a, pour tout couple de transversales au feuilletage centre-instable T_1, T_2 incluses chacune dans une fibre unitaire tangente, et tel qu'il existe une application d'holonomie $\mathrm{hol}^{cu}_{T_1\to T_2} : T_1 \to T_2$ qui est un homéomorphisme, on a, pour $w \in T_2$, basé en $x \in L$, et $w' = \mathrm{hol}^{cu}_{T_2\to T_1}(w)$, basé en $x' \in L$:

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}^{cu}_{T_1\to T_2} * \omega_{x'}\right]}{d\omega_x}(w) = k^u(x',x;\xi),$$

où $\xi = c_w(-\infty)$. Nous allons en déduire le théorème suivant :

Theorème 5.3.5. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété feuilletée close dont les feuilles sont courbées négativement. Alors l'application $h_0 : M \to \mathbb{R}$ associant à tout $x \in M$ le nombre :*

$$h_0(x) = \int_{T^1_x\mathscr{F}} \sin\theta \, d\mathrm{Leb}_{T^1_x\mathscr{F}},$$

est une fonction continue sur M qui, en restriction aux feuilles de M, est ϕ^u-harmonique.

Considérons, pour prouver ce théorème, la famille de mesures finies sur $\widetilde{L}(\infty)$ induite par $(\omega_x)_{x\in L}$. Tout d'abord cette famille peut être relevée de façon naturelle au revêtement universel en une famille que nous notons encore $(\omega_z)_{z\in\widetilde{L}}$. Nous rappelons ensuite qu'il existe une identification naturelle, pour $z\in\widetilde{L}$, $\pi_z : T^1_z\widetilde{L}\to\widetilde{L}(\infty)$, qui associe à tout vecteur unitaire v basé en z, le point $\pi_z(v)=c_v(-\infty)$. Via cette identification, $\tau_{z,z'}=\pi_{z'}^{-1}\circ\pi_z : T^1_z\widetilde{L}\to T^1_{z'}\widetilde{L}$ est une transformation d'holonomie le long du feuilletage instable.

Ainsi, si $\nu_z=\pi_z * \omega_z$, nous obtenons, pour tous $z_1,z_2\in\widetilde{L}$, que les mesures ν_{z_1} et ν_{z_2} sont dans la même classe (celle que nous appelons *classe de visibilité*), avec la dérivée suivante, pour tout $\xi\in\widetilde{L}(\infty)$:

$$\frac{d\nu_{z_2}}{d\nu_{z_1}}(\xi)=\frac{d\omega_{z_2}}{d[\tau_{z_1,z_2}*\omega_{z_1}]}(\pi_{z_2}^{-1}(\xi))=k^u(z_1,z_2;\xi). \tag{5.3.12}$$

Preuve du théorème 5.3.5. Tout d'abord, puisque les fibrés centre-instables, et unitaires tangents aux feuilles sont des fonctions continues, l'angle qu'ils forment, θ, ainsi que son sinus, le sont également. Puisque la métrique varie continûment avec le paramètre transverse, cette intégrale varie continûment avec $x\in M$.

Nous devons prouver qu'en restriction à une feuille L, cette fonction est ϕ^u-harmonique. Pour ce faire, nous allons relever h_0 au revêtement universel de la feuille L. Nous avons donc une fonction $\widetilde{h}_0$ qui associe à tout z la masse de la mesure ω_z. Or par définition, ν_z et ω_z ont même masse. Une application de la formule (5.3.12) implique alors, après avoir fixé un point base $o\in\widetilde{L}$, que l'on a pour tout z,

$$\widetilde{h}_0(z)=\mathrm{mass}(\nu_z)=\int_{\widetilde{L}(\infty)}k^u(o,z;\xi)\,d\nu_o(\xi).$$

C'est donc que h_0 est, en restriction aux feuilles, une fonction ϕ^u-harmonique. □

Mesures ϕ^u-harmoniques. Nous pouvons à présent définir la notion de mesure ϕ^u-harmonique pour les feuilletages dont les feuilles sont courbées négativement :

Définition 5.3.6. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée. Nous la supposons munie d'une métrique feuilletée de telle sorte que toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ soient courbées négativement. Une mesure de probabilité m sur M sera dite ϕ^u-harmonique si elle a une désintégration équivalente à Lebesgue dans les feuilles de $\mathscr{F}$, et si les densités locales sont des fonctions ϕ^u-harmoniques.*

La question de l'existence de telles mesures sera traitée dans le paragraphe suivant. Nous donnons néanmoins une propriété sur le support des mesures ϕ^u-harmoniques.

Lemme 5.3.7. *Soit m_1 et m_2 deux mesures ϕ^u-harmoniques singulières. Alors il existe un ensemble de Borel $\mathscr{X}\subset M$ tel que, $m_1(\mathscr{X})=1$, $m_2(\mathscr{X})=0$, et $\mathscr{X}$ et est saturé par $\mathscr{F}$.*

Preuve. Soit m_2 une mesure ϕ^u-harmonique singulière par rapport à m_1. Il existe donc un ensemble de Borel $\mathscr{X}_0\subset M$ tel que $m_1(\mathscr{X}_0)=1$ et $m_2(\mathscr{X}_0)=0$. Puisque les densités des mesures conditionnelles m_1 dans les plaques sont >0, il vient que la famille de mesures induites sur les transversales T_i est quasi-invariante par transformations d'holonomies.

Ainsi, quitte à jeter un ensemble de mesure nulle pour m_1, nous pouvons supposer que, lorsque $\mu(U_i)>0$, les projections de $\mathscr{X}_0\cap U_i$ sur T_i, notées X_i sont pleines pour $\nu_{i,1}$, et invariantes par holonomie dans le sens que pour tout j, $\tau_{ij}(X_i\cap\mathrm{dom}(\tau_{ij}))=X_j\cap\mathrm{but}(\tau_{ij})$, où $\mathrm{dom}(\tau_{ij})$ et $\mathrm{but}(\tau_{ij})$ désignent respectivement le domaine et le but de l'application d'holonomie τ_{ij}. Ainsi, si $\mathscr{X}$ représente le saturé de $\mathscr{X}_0$, pour tout i, X_i est également la projection sur T_i de $\mathscr{X}\cap U_i$. D'autre part, puisque $\mathscr{X}_0\subset\mathscr{X}$, on a $m_1(\mathscr{X})=1$.

À présent, il reste à voir que $m_2(\mathscr{X}) = 0$. Nous avons pour tout i, $\nu_{2,i}(X_i) = m_2(\mathscr{X}_0 \cap U_i) = 0$, donc en particulier, puisque X_i est également la projection de $\mathscr{X} \cap U_i$ sur T_i, nous avons $m_2(\mathscr{X} \cap U_i) = 0$. □

Remarque. La propositon précédente n'utilise que le fait que le désintégration des mesures ϕ^u-harmoniques est équivalente à Lebesgue dans les feuilles de $\mathscr{F}$, et non une propriété spéciale des densités locales (outre le fait qu'elles soient strictement positives). En conséquence, la conclusion reste valide quelles que soient les mesures qui ont une désintégration équivalente par rapport à Lebesgue dans les feuilles, et quel que soit le feuilletage $\mathscr{F}$ (on ne fait pas d'hypothèse de courbure négative). En particulier, elle est valide pour les mesures F-harmoniques définies pour les feuilletages suspensions que nous définirons au chapitre VI.

Nous n'avons pas, a priori, de décomposition ergodique pour les mesures ϕ^u-harmonique, ou plutôt, elle sera montrée plus tard. Nous pouvons néanmoins prouver le lemme suivant qui nous servira à prouver la correspondance bijective entre mesure ϕ^u-harmonique et les états de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté. Il nous servira à nous restreindre au cas de mesures ϕ^u-harmoniques pour lesquelles presque toute feuille rencontre une transversale donnée.

Lemme 5.3.8. *Soit $\mathscr{A} = (U_i, \phi_i)_{i\in I}$ un atlas feuilleté pour $\mathscr{F}$, et $(T_i)_{i\in I}$ un système complet de transversales correspondantes. Alors pour toute mesure ϕ^u-harmonique m, il existe une famille de mesures finies $m_0, \ldots m_k$, ainsi que des Boréliens saturés $\mathscr{X}_{i_0}, \ldots, \mathscr{X}_{i_k}$ tels que pour tout j,*

1. *$\mathscr{X}_{i_j} \cap \mathscr{X}_{i_l} = \emptyset$ pour $j \neq l$;*
2. *m_{i_j} est une mesure ϕ^u-harmonique finie supportée par $\mathscr{X}_{i_j}$: en particulier, m_{i_j} et m_{i_l} sont singulières dès que $j \neq l$;*
3. *il existe une transversale T_{i_j} telle que μ_{i_j}-presque toute feuille de $\mathscr{X}_{i_j}$ rencontre la transversale T_{i_j}.*

Preuve. Soit m une mesure ϕ^u-harmonique pour $\mathscr{F}$. Lorsque $m(U_i) > 0$, nous posons ν_i la projection de la restriction $m_{|U_i}$ sur T_i. Comme dans la preuve du lemme précédent, on peut supposer l'existence, pour tout i tel que $m(U_i) > 0$, d'un ensemble X_i de mesure pleine pour ν_i tel que les X_i soient invariants les transformations d'holonomie.

Soit i_0 un indice tel que $m(U_{i_0}) > 0$. Nous pouvons définir l'ensemble $\mathscr{X}_{i_0}$ comme le saturé de X_{i_0}, c'est un ensemble Borélien, sur lequel on peut restreindre m, obtenant ainsi une mesure Borélienne m_{i_j}. Nous pouvons alors écrire $m = m_{i_0} + m'$.

Par définition de $\mathscr{X}_{i_0}$, les mesures m_{i_0} et $m' = m_{|^c\mathscr{X}_{i_0}}$, sont encore ϕ^u-harmoniques. Soit alors $m' = 0$, c'est-à-dire $\mathscr{X}_{i_0}$ est de mesure pleine pour m, soit nous pouvons appliquer ce raisonnement à m' : ce procédé termine en un nombre d'étapes fini, donnant ainsi les familles de Boréliens et de mesures désirés. □

3.2 – Correspondance bijective entre états de u-Gibbs et mesures ϕ^u-harmoniques

Nous supposons dans la suite que $(M, \mathscr{F})$ est une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée de sorte que toutes les feuilles soient courbées négativement. On rappelle que par compacité de M, et par continuité de la métrique avec le paramètre transverse, la courbure sectionnelle des feuille est pincée entre deux constantes négatives uniformes $-b^2 \leq -a^2 < 0$, et que le rayon d'injectivité est uniformément minoré, de sorte qu'il es possible de recouvrir M par un atlas feuilleté fini dont toutes les plaques trivialisent le revêtement universel Riemannien.

Projection d'un état de u-Gibbs. Il a été noté dans le travail de Bonatti, Gómez-Mont et Martínez, [BGM], que la projection de tout état de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté G_t de $T^1\mathscr{F}$, le long des fibres unitaires tangentes au feuilletage, a une désintégration équivalente par rapport à Lebesgue dans les feuilles de $\mathscr{F}$. La proposition suivante complète cette observation en s'intéressant plus particulièrement aux densités locales.

Proposition 5.3.9. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée de sorte que toutes les feuilles soient courbées négativement. Soit μ un état de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté de $T^1\mathscr{F}$. Alors la projection de μ le long des sphères tangentes aux feuilletage est une mesure ϕ^u-harmonique, que l'on note m.*

De plus, si $\mathscr{T}$ est une transversale complète au feuilletage sur lequel agit le pseudogroupe d'holonomie de $\mathscr{F}$, les mesures induites sur $\mathscr{T}$ par m et par μ sont les mêmes, de sorte que la projection des états de u-Gibbs le long des fibres unitaires tangentes soit injective.

Preuve. Soit μ un état de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté G_t. Comme il a été noté dans [BGM], il s'agit de s'intéresser aux mesures conditionnelles de μ dans les plaques centre-instables. Nous avons déjà remarqué dans la section précédente, que ces mesures étaient équivalentes à la mesure de Lebesgue. De plus, les densités locales dans une carte feuilletée pour le feuilletage centre-instable vérifient la relation suivante : pour tous v_1, v_2 appartenant à la même variété centre-instable locale,

$$\frac{\psi^{cu}(v_2)}{\psi^{cu}(v_1)} = k^u(v_1, v_2; \xi),$$

avec la notation abusive suivante. Nous écrivons $k^u(v_1, v_2; \xi)$ pour désigner $k^u(z_1, z_2; \xi)$, ou z_i est le point base du relevé de v_i au revêtement universel $\widetilde{L}$ *dans un domaine fondamental fixé*, (celui contenant le point base o), et ξ représente la valeur commune $G_{-\infty}(v_i)$.

À présent, si $U = \bigcup_{x\in T} P(x)$ est une carte feuilletée pour $\mathscr{F}$, suffisamment fine, où T est une section transverse au feuilletage, nous pouvons la relever en une carte feuilletée $\widehat{U}$ pour $\widehat{\mathscr{F}}$ qui est trivialement feuilletée par les sphères tangentes, et qui trivialise les feuilletage centre-instable.

Nous pouvons alors désintégrer la restriction de la mesure μ à la carte $\widehat{U}$ par rapport à une mesure ν_T définie sur T, de sorte que les mesures conditionnelles dans les plaques $\bigcup_{v\in T^1_x P(x)} W^{cu}_{loc}(v)$, soient obtenues en intégrant contre une certaine mesure de Borel finie η_x sur $T^1_x P(x)$ les mesures $\psi^{cu}(w)\mathrm{Leb}_{W^{cu}_{loc}(v)}(w)$ (nous pouvons naturellement choisir nos mesures normalisées de sorte que ψ^{cu} vaille 1 identiquement sur $T^1_x P(x)$).

Alors la projection de μ sur U est une mesure ϕ^u-harmonique par définition, et induit la même mesure ν_T sur la transversale T. Puisque, par la proposition 5.2.3, deux états de u-Gibbs différents induisent des mesures différentes sur une transversale complète, la projection définie ce-dessus est injective. Nous pouvons ainsi conclure la preuve de la proposition. □

L'existence des états de u-Gibbs étant assurée par le théorème 5.2.2, cette proposition règle donc le problème d'existence des mesures ϕ^u-harmoniques pour les feuilletages dont les feuilles sont à courbure négatives.

Corollaire 5.3.10. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée de sorte que toutes les feuilles soient courbées négativement. Alors l'ensemble des mesures ϕ^u-harmoniques est un convexe non vide.*

Relevé canonique d'une mesure ϕ^u-harmonique. Réciproquement, il est possible de relever n'importe quelle mesure ϕ^u-harmonique au fibré unitaire tangent $T^1\mathscr{F}$. Nous aurons besoin des deux notations suivantes :

- $pr : T^1\mathscr{F} \to M$ désigne la projection canonique le long des sphères tangentes au feuilletage $\mathscr{F}$;
- $\mathscr{G}ibbs^u$ désigne l'ensemble des états de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté ;
- $\mathscr{H}ar^{\phi^u}(\mathscr{F})$ désigne l'ensemble des mesures ϕ^u-harmoniques pour $\mathscr{F}$.

Theorème 5.3.11. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée de sorte que toutes les feuilles soient courbées négativement. Alors l'application $pr_* : \mathscr{G}ibbs^u \to \mathscr{H}ar^{\phi^u}(\mathscr{F})$ qui associe à un état de u-Gibbs μ sa projection le long des sphères tangentes $pr * \mu$, est une bijection.*

*Lorsque $m = pr * \mu$, et $\mu \in \mathscr{G}ibbs^u$, nous disons que μ est le **relevé canonique** de m au fibré $T^1\mathscr{F}$.*

Preuve. La preuve est la même que pour les mesures harmoniques (voir 4.3.5). Nous rappelons les grandes lignes de la preuve :

- On choisit un bon atlas feuilleté pour $\mathscr{F}$ suffisamment fin pour que les plaques soient des petits disques trivialisant les revêtements universels des feuilles, et en tirant en arrière par le fibré unitaire tangent, on obtient un atlas pour $\widehat{\mathscr{F}}$.
- On prend une mesure ϕ^u-harmonique μ telle qu'il existe une transversale T_{i_0} rencontrant μ-presque toute feuille de $\mathscr{F}$: on peut se ramener à ce cas par le lemme 5.3.8.
- On étend par l'holonomie les densités ϕ^u-harmonique de μ-presque toute plaque passant par T_{i_0}, en utilisant le lemme de Ghys (voir 1.3.3), puis on remonte ces fonctions aux revêtements universels des feuilles.
- En utilisant leurs représentations intégrales à l'infini, nous pouvons dérouler les densités ϕ^u-harmoniques, il y a une façon canonique de remonter ces fonctions aux fibrés unitaires tangents des revêtements universels des feuilles.
- Nous définissons ainsi en reprojetant par le revêtement universel, une familles de mesures sur chaque plaque. qui sont invariantes par le flot et dont les désintégrations dans les feuilles instables sont équivalentes à Lebesgue.
- On normalise ces densités par un cocycle convenable, puis on intègre les mesures sur les cartes feuilletées pour $\widehat{\mathscr{F}}$ par le mesure transverse de μ, de sorte à pouvoir recoller ces mesures de façon cohérente avec l'holonomie.
- On obtient le relevé canonique de toute mesure ϕ^u-harmonique, qui est une section de la projection le long des fibres unitaires tangentes.
- En utilisant ce qui précède, $pr_* : \mathscr{G}ibbs^u \to \mathscr{H}ar^{\phi^u}(\mathscr{F})$ est surjective.
- En utilisant la proposition 5.3.9, nous savons que $pr_* : \mathscr{G}ibbs^u \to \mathscr{H}ar^{\phi^u}(\mathscr{F})$ est injective.
- Nous pouvons conclure.

□

Décomposition ergodique des mesures ϕ^u-harmoniques. Il existe une notion d'ergodicité pour les mesures ϕ^u-harmonique, de même qu'il en existe une pour les mesures harmoniques usuelles. En vertu du lemme 5.3.7, qui énonce que lorsqu'on a deux mesures ϕ^u-harmoniques singulières, alors il existe un Borélien saturé plein pour l'une et nul pour l'autre, la notion suivante est la notion la plus naturelle d'ergodicité.

Définition 5.3.12. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée de sorte que toutes les feuilles soient courbées négativement. Une mesure ϕ^u-harmonique m sur M est dite ergodique si tout Borélien saturé par le feuilletage $\mathscr{F}$ est soit de mesure nulle, soit de mesure pleine.*

Remarque. Si $\mathscr{A} = (U_i, \phi_i)_{i\in I}$ est un bon atlas feuilleté pour le feuilletage $\mathscr{F}$, nous considérons la transversale complète associée $\mathscr{T} = \bigcup_{i\in I} T_i$, sur lequel agit le pseudogroupe d'holonomie. Une mesure ϕ^u-harmonique induit une mesure de probabilité, notée $\widehat{m}$, sur $\mathscr{T}$ qui est quasi-invariante par le pseudogroupe d'holonomie, le cocycle de Radon-Nikodym associé étant défini comme le quotient de deux fonctions ϕ^u-harmoniques.

Dire que m est ergodique revient exactement à dire que toute partie borélienne de $\mathscr{T}$ saturée par l'action du pseudogroupe d'holonomie a une mesure nulle ou pleine pour $\widehat{m}$.

Proposition 5.3.13. *Une mesure ϕ^u-harmonique sur M est ergodique si et seulement si son relevé canonique à $T^1\mathscr{F}$ est un état de u-Gibbs ergodique pour le flot géodésique feuilleté.*

Preuve. Soit $\mathscr{A} = (U_i, \phi_i)_{i\in I}$ un bon atlas feuilleté pour $\mathscr{F}$, que l'on tire en arrière afin de définir un bon atlas feuilleté pour $\widehat{\mathscr{F}}$. Soit $\mathscr{T}$ la transversale complète associée. Nous savons que si m est une mesure ϕ^u-harmonique pour $\mathscr{F}$ et que si μ est son relevé canonique au fibré $T^1\mathscr{F}$, alors, les deux mesures induites sur $\mathscr{T}$, $\widehat{m}$ et $\widehat{\mu}$, sont égales.

Soit alors $\mathscr{X} \subset \mathscr{T}$ un Borélien saturé par le pseudogroupe d'holonomie de $\mathscr{F}$. Alors le Borélien de $T^1\mathscr{F}$ défini comme l'union des plaques de $\widehat{\mathscr{F}}$ rencontrant $\mathscr{X}$ est un Borélien saturé par le feuilletage $\widehat{\mathscr{F}}$, et en particulier invariant par le flot géodésique feuilleté G_t.

Ainsi donc si l'on suppose que le relevé canonique de m est ergodique, ce Borélien est de mesure nulle ou pleine pour μ, et donc $\mathscr{X}$ est de mesure pleine ou nulle pour $\widehat{\mu} = \widehat{m}$. Ceci prouve l'ergodicité de m.

À présent, supposons qu'un état de u-Gibbs μ ne soit pas ergodique : il existe alors deux états de u-Gibbs singuliers (rappelons que les composantes ergodiques d'un états u-Gibbs sont encore des états de u-Gibbs), μ_1, μ_2, ainsi qu'un réel $0 < \alpha < 1$ tels que $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$.

En projetant nous avons alors $m = \alpha m_1 + (1-\alpha)m_2$. Puisque μ_1 et μ_2 sont singulières, elles induisent des mesures singulières sur la transversale $\mathscr{T}$: c'est la proposition 5.2.3. Puisque m_1 et m_2 induisent respectivement les mêmes mesures sur la transversale, elles sont également singulières.

Par le lemme 5.3.7, il existe un ensemble de Borel saturé $\mathscr{X} \subset M$ tel que $m_1(\mathscr{X}) = 1$, et $m_2(\mathscr{X}) = 0$: ainsi $m(\mathscr{X}) = \alpha \in (0,1)$: m n'est pas ergodique.

Puisque la projection le long des sphères tangentes au feuilletages induit une bijection entre états de u-Gibbs et mesures ϕ^u-harmoniques, nous pouvons conclure. □

Nous pouvons à présent déduire de ce résultat, ainsi que de la décomposition ergodique des mesures invariantes par un flot, le théorème suivant qui donne la structure du convexe des mesures ϕ^u-harmoniques, et plus particulièrement, la décomposition ergodique de ces mesures :

Theorème 5.3.14 (Décomposition ergodique)**.** *Soit $(M, \mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée telles que ses feuilles soient courbées négativement. L'espace $\mathscr{H}ar^{\phi^u}(\mathscr{F})$ des mesures ϕ^u-harmoniques pour $\mathscr{F}$ est un ensemble convexe non vide, dont les points extrémaux sont exactement donnés par les mesures ergodiques.*

De plus, il existe un Borélien de probabilité totale $\mathscr{X}$, c'est-à-dire plein pour toute mesure ϕ^u-harmonique, ainsi qu'une unique famille $(m_x)_{x\in\mathscr{X}}$ de mesures sur M tels que :

1. *pour tout $x \in \mathscr{X}$, m_x est une mesure ϕ^u-harmonique ergodique ;*
2. *si $x, y \in \mathscr{X}$ appartiennent à la même feuille, $m_x = m_y$;*
3. *pour toute mesure ϕ^u-harmonique m, on a :*

$$m = \int_{\mathscr{X}} m_x \, dm(x).$$

Preuve. Que les points extrémaux du convexe $\mathscr{H}ar^{\phi^u}$ soient données exactement par les mesures ergodiques découle directement de la proposition précédente, ainsi que de ce que ce fait est vrai pour le convexe $\mathscr{G}ibbs^u$ des états de u-Gibbs pour G_t.

Soit $\mathscr{Y} \subset T^1\mathscr{F}$ l'ensemble des points u-réguliers, c'est-à-dire des vecteurs unitaires v tangents à $\mathscr{F}$ pour lesquels les mesures $1/T\int \delta_{G_t(v)}dt$ et $1/T\int \delta_{G_{-t}(v)}dt$ convergent vers une même limite μ_v qui de plus est un état de u-Gibbs.

Alors, puisque toute composante ergodique d'un état de u-Gibbs est encore un état de u-Gibbs, $\mathscr{Y}$ est de mesure pleine pour tout état de u-Gibbs. Ainsi, sa projection $\mathscr{X}$ est-elle pleine pour toute mesure ϕ^u-harmonique m (voir le théorème 5.3.11).

Nous affirmons que deux vecteurs unitaires v_1 et v_2 tangents à une même feuille et u-réguliers, peuvent être reliés par une concaténation de chemins dans $\mathscr{W}^s$, et dans $\mathscr{W}^{cu}$, *dont les extrémités sont encore u-régulières.* Pour voir ceci, il s'agit de procéder comme lors de la preuve de la proposition 5.2.3, où nous prouvons que deux états de u-Gibbs ergodiques différents, donc singuliers, induisent sur la transversale deux mesures mutuellement singulières. Nous utilisons :

- le fait qu'en restriction aux variétés centre-instables, l'ensemble des points u-réguliers est de mesure pleine pour Lebesgue ;
- l'absolue continuité du feuilletage stable fort.

Nous en déduisons alors que lorsque v_1 et v_2 sont tangents à la même feuille, nous avons $\mu_{v_1} = \mu_{v_2}$. En particulier, pour $x \in \mathscr{X}$, la projection $m_x = pr * \mu_v$ ne dépend pas de $v \in T^1_x\mathscr{F}$, et si x et y sont sur la même feuille, alors $m_x = m_y$.

Chacune des mesures μ_v est bien entendu ergodique : ce sont exactement les composantes ergodiques des états de u-Gibbs. En vertu de la proposition précédente 5.3.13, les mesures m_x sont toutes ergodiques.

Pour finir, il reste à prouver la décomposition ergodique à proprement parler. Mais pour l'obtenir, il n'y a qu'à projeter sur M le long des sphères unitaires tangentes à $\mathscr{F}$ la décomposition ergodique des états de u-Gibbs. La preuve est alors terminée. □

Mesures totalement invariantes. À partir d'une mesure transverse à $\mathscr{F}$ invariante par holonomie, nous pouvons toujours former une mesure harmonique en la combinant avec le volume dans les feuilles.

De même, nous pouvons toujours également former une mesure ϕ^u-harmonique en combinant, non pas avec le volume, mais avec la mesure à densité par rapport à Lebesgue donnée par la fonction ϕ^u-harmonique dans les feuilles h_0.

Définition 5.3.15. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée de sorte que toutes les feuilles soient courbées négativement. Une mesure ϕ^u-harmonique totalement invariante est une mesure qui s'écrit dans chaque carte feuilletée comme le produit d'une mesure transverse, invariante par holonomie, par la mesure qui dans chaque plaque a la densité h_0 par rapport à la mesure de Lebesgue, où l'on rappelle que pour tout $x \in M$,*

$$h_0(x) = \int_{T^1_x\mathscr{F}} \sin\theta \, d\mathrm{Leb}_{T^1_x\mathscr{F}},$$

où θ est l'angle formé par les fibres centre-instables, et unitaires tangentes.

Ainsi, l'argument selon lequel les mesures harmoniques forment une bonne notion généralisant les mesures transverses quasi-invariantes, se transpose au cas des mesures ϕ^u-harmoniques.

4 | Conditions suffisantes pour l'existence de mesures invariantes

Dans cette partie, nous considérons toujours une variété close feuilletée $(M, \mathscr{F})$ munie d'une métrique feuilletée, dont les feuilles sont courbées négativement.

4.1 – Condition suffisante sur les états de u-Gibbs

Nous avons énoncé le théorème 5.2.4 sous l'hypothèse d'un flot hyperbolique feuilleté préservant le volume dans les feuilles. C'est bien le cas du flot géodésique tangent aux feuilles G_t, qui comme il est bien connu, préserve la *mesure de Liouville* des feuilles. Nous avons alors le théorème suivant.

Theorème 5.4.1. *Soit $(M, \mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée dont les feuilles sont négativement courbées. Alors si le flot géodésique feuilleté admet un état de su-Gibbs, $\mathscr{F}$ a une mesure transverse invariante.*

4.2 – Condition suffisante sur les densités ϕ^u-harmoniques : une généralisation d'un résultat de Matsumoto

Un résultat de Matsumoto. Étant donnée une mesure ϕ^u-harmonique, sur chaque feuille typique est définie une fonction ϕ^u-harmonique, obtenue en prolongeant les densités locales. Associée à cette fonction ϕ^u-harmonique, qu'on peut appeler fonction caractéristique de la feuille, il y a une mesure de Borel finie η sur la sphère à l'infini de la feuille.

Dans [Mat], Matsumoto définit ces objets pour les mesures harmoniques, et prouve que dans le cas des feuilletages par variétés hyperboliques, si m est une mesure harmonique qui n'est pas totalement invariante, alors :

- la fonction harmonique caractéristique d'une feuille typique est non bornée ;
- la mesure η associée sur la sphère à l'infini d'une feuille typique est singulière par rapport à Lebesgue.

Une version de ce théorème dans le cas des feuilletages transversalement conformes par surfaces hyperboliques, se trouve dans [BGM], et repose sur le travail de [DK] sur l'exposant de Lyapunov du mouvement Brownien feuilleté.

Nous proposons de prouver un théorème analogue dans le cas des mesures ϕ^u-harmoniques, ce qui donnera une nouvelle preuve, ne faisant pas appel aux propriétés du mouvement Brownien, mais aux propriétés d'absolue continuité des horosphères, du théorème de Matsumoto.

Fonctions et classes de mesure caractéristiques. Avant d'énoncer le théorème à proprement parler, nous devons expliquer précisément quels sont les objets que nous associons à une feuille typique pour une mesure ϕ^u-harmonique m.

Nous avons vu à plusieurs reprises comment utiliser le lemme de Ghys (voir 4.3.5) les densités locales ϕ^u-harmoniques de la mesure m sur une feuille typique : obtenant ainsi la *fonction caractéristique h_L*. Bien sûr, elle n'est déterminée qu'à une constante multiplicative près, puisque sa détermination dépend d'un choix de plaque initial.

Par définition d'une fonction ϕ^u-harmonique, le relevé au revêtement universel de h_L s'écrit comme intégrale du noyau $k^u(o, z; \xi)$ contre une certaine mesure de Borel finie η_L définie sur $\widetilde{L}(\infty)$. Ici encore, seule la classe de mesure $[\eta_L]$ est déterminée indépendamment d'un choix de plaque initial. Nous avons ainsi défini la *classe de mesure caractéristique* sur la sphère à l'infini d'une feuille typique.

Sur la sphère à l'infini de toute feuille L de $\mathscr{F}$, nous pouvons définir la *classe de visibilité*, en poussant par le flot géodésique la mesure de Lebesgue restreinte à une fibre unitaire tangente à L. Nous rappelons que puisque L se réalise comme feuille d'un feuilletage d'une variété *compacte*, le feuilletage centre-instable est absolument continu, de sorte que cette classe de mesure soit bien définie.

Condition suffisante pour l'existence de mesure transverse invariante. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui donne une condition suffisante sur la classe caractéristique sur la sphère à l'infini d'une feuille typique pour l'existence d'une mesure transverse invariante par holonomie. En suivant Matsumoto, nous nous dirons qu'une certaine propriété est vérifiée pour *m-presque toute feuille*, s'il existe un ensemble de Borel $\mathscr{X}$ saturé par le feuilletage et de mesure pleine pour m tel que toute feuille passant par $\mathscr{X}$ vérifie cette propriété.

Theorème 5.4.2. *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée dont les feuilles sont négativement courbées. Soit m une mesure ϕ^u-harmonique qui n'est pas totalement invariante. Alors pour m-presque toute feuille L, la classe de mesure caractéristique associée $[\eta_L]$ sur $\widetilde{L}(\infty)$ est singulière par rapport à la classe de visibilité.*

Nous rappelons que pour des feuilletages dont les feuilles sont hyperboliques, les mesures ϕ^u-harmoniques coïncident avec les mesures harmoniques usuelles au sens de Garnett. De plus, en courbure constante, la sphère à l'infini est une variété lisse, et toutes les transformations d'holonomies du feuilletage centre instable sont lisses de sorte que la classe de visibilité soit donnée par la classe de Lebesgue à l'infini. Nous obtenons alors, dans le cas où les feuilles sont des variétés hyperboliques, une nouvelle preuve du théorème de Matsumoto :

Corollaire 5.4.3 (Matsumoto)**.** *Soit $(M,\mathscr{F})$ une variété close feuilletée par des variétés hyperboliques. Soit m une mesure harmonique qui n'est pas totalement invariante. Alors pour m-presque toute feuille L, la classe de mesure caractéristique associée $[\eta_L]$ sur $\widetilde{L}(\infty)$ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.*

De plus la fonction harmonique caractéristique d'une feuille typique n'est pas bornée.

Preuve. Le fait que la classe caractéristique d'une feuille typique pour une mesure harmonique non totalement invariante soit singulière par rapport à la mesure de Lebesgue est une conséquence immédiate de ce qui précède, et du théorème 5.4.2.

Le fait que la fonction caractéristique d'une feuille typique ne soit pas bornée vient du fait qu'alors sa classe caractéristique est singulière par rapport à Lebesgue, et du théorème de Fatou usuel pour les fonctions harmoniques (voir le théorème 11.24 [Ru]) : pour Lebesgue-presque tout point ξ de la sphère à l'infini, la fonction harmonique caractéristique croît indéfiniment lorsque l'on tend vers ξ non-tangentiellement. □

Lien avec les états de su-Gibbs. La première étape dans la preuve de ce théorème est la réduction au cas des mesures ϕ^u-harmoniques ergodiques. Nous avons prouvé un théorème de décomposition ergodique pour les mesures ϕ^u-harmoniques : voir le théorème 5.3.14 : nous pouvons donc l'utiliser pour nous restreindre au cas des mesures ergodiques.

Soit à présent, m une mesure ϕ^u-harmonique ergodique telle qu'il existe un ensemble de Borel $\mathscr{X}$ saturé par le feuilletage de mesure positive tel que la classe caractéristique de toute feuille passant par $\mathscr{X}$ ne soit pas singulière par rapport à la classe de visibilité. Alors, par ergodicité, cet ensemble est de mesure pleine. Le théorème 5.4.2 est conséquence de la proposition suivante, ainsi que du théorème 5.4.1 :

Proposition 5.4.4. *Supposons qu'il existe une mesure ϕ^u-harmonique ergodique m telle que la classe caractéristique de m-presque toute feuille de $\mathscr{F}$ ne soit pas singulière par rapport à la classe de visibilité. Alors son relevé canonique μ est un état de su-Gibbs.*

4.3 – Preuve de la proposition 5.4.4

Désintégration dans les variétés stables. Dans la suite, $(M,\mathscr{F})$ est une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilletée, telle que toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ soient courbées négativement. Nous commençons par réduire la preuve de la proposition 5.4.4 à celle d'une propriété des états de u-Gibbs qui ne sont pas totalement invariants. Plus précisément, nous prouvons que la proposition 5.4.4 est une conséquence de la proposition suivante, que nous énonçons dans le cadre du flot géodésique feuilleté, mais qui reste vraie pour tout flot hyperbolique feuilleté :

Proposition 5.4.5. *Soit μ un état de u-Gibbs ergodique sur $T^1\mathscr{F}$ pour le flot géodésique feuilleté G_t. Alors nous avons l'alternative suivante :*

- *soit μ est un état de su-Gibbs ;*
- *soit la désintégration de μ dans les variétés stables est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Cela entraîne la proposition 5.4.4. Pour prouver la proposition 5.4.4 à partir de la proposition précédente, nous avons besoin de deux applications plus ou moins immédiates de l'absolue continuité des feuilletages stable et instable. Pour l'énoncé le premier lemme, nous avons besoin de rappeler que pour toute mesure m, ϕ^u-harmonique pour $\mathscr{F}$, nous pouvons, pour m-presque toute feuille, projeter la classe caractéristique sur les fibres unitaires tangentes à L. Nous appellerons encore abusivement classe caractéristique de L la classe ainsi définie qui est invariante par holonomie centre-instable.

Lemme 5.4.6. *Soit m une mesure ϕ^u-harmonique, et μ son relevé canonique. Alors la désintégration de μ dans les fibres unitaires tangentes est absolument continue par rapport à la classe caractéristique de L.*

Preuve. Soit U une carte feuilletée pour $\mathscr{F}$, et T une section transverse, telle que $\widehat{U} = \bigcup_{x\in T} T^1P(x)$ soit une carte feuilletée pour $\widehat{\mathscr{F}}$. Alors, par définition, la mesure conditionnelle du relevé canonique μ de m dans une plaque typique $T^1P(x)$ s'obtient en intégrant des mesures qui ont une densité par rapport à la mesure de Lebesgue (cette densité est donnée en termes du noyau k^u : voir par exemple la proposition 5.3.9) dans les variétés centre-instables locales contre une mesure à l'infini qui est dans la classe caractéristique de la feuille correspondante.

Alors, en utilisant l'absolue continuité du feuilletage par les fibres unitaires tangentes, nous pouvons désintégrer cette même mesure dans les fibres unitaires tangentes par rapport à la mesure de Lebesgue dans une variété centre-instable locale. Puis, par invariance de la classe caractéristique par holonomie centre-instable, nous voyons que les mesures conditionnelles dans les fibres unitaires tangentes sont dans la classe caractéristique, et nous pouvons conclure. □

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de l'absolue continuité du feuilletage centre-instable.

Lemme 5.4.7. *La désintégration d'un état de u-Gibbs est singulière par rapport à Lebesgue dans les variétés stables si et seulement si sa désintégration dans les fibres l'est.*

Preuve. Soit μ un état de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté. Nous considérons une carte feuilletée pour $\widehat{\mathscr{F}}$ dont les plaques sont des petits ouverts $\mathscr{R}_{x_0}$ possédant la structure de produit local. Considérons la mesure conditionnelle μ_{x_0} sur cette plaque. Par absolue continuité du feuilletage centre instable, et parce que μ_{x_0} a une désintégration continue par rapport à Lebesgue dans les variétés centre-instables, les mesures conditionnelles de μ dans les feuilles stables locales de $\mathscr{R}_{x_0}$ sont simultanément singulières par rapport à Lebesgue : si l'une des mesures conditionnelles l'est, alors elle le sont toutes. Ainsi, la désintégration de μ_{x_0} dans les feuilles stables locale est singulière par rapport à Lebesgue si et seulement si sa projection sur une feuille stable faible le long des plaques centre-instable est singulière par rapport à Lebesgue.

De même, la désintégration de μ_{x_0} dans les fibres unitaires tangentes est singulière par rapport à Lebesgue si et seulement si sa projection sur une fibre l'est.

Par définition, nous passons de la projection le long du feuilletage centre-instable sur une variété stable locale à celle sur une fibre unitaire tangente par une transformation d'holonomie absolument continue : par ce qui précède, le lemme suit donc. □

Fin de la preuve de la proposition 5.4.4. Supposons que la proposition 5.4.5 soit vraie, et supposons qu'il existe une mesure ϕ^u-harmonique ergodique telle que la classe caractéristique de m-presque toute feuille ne soit pas singulière par rapport à la classe de visibilité. C'est donc, en appliquant le lemme 5.4.6, que lorsque l'on projette cette classe caractéristique dans les fibres unitaires tangentes, les mesures que nous obtenons ne sont pas singulières par rapport à la mesure de Lebesgue.

Nous en déduisons donc, par le lemme 5.4.7, que la désintégration de μ dans les variétés stables n'est pas singulière par rapport à Lebesgue. Mais par la proposition, ce n'est possible que si μ est un su-Gibbs.

Ainsi, pour prouver la proposition 5.4.4, et donc le théorème 5.4.2, il suffit de montrer la proposition 5.4.5. □

Preuve de la proposition 5.4.5. Il suffit de prouver qu'un état de u-Gibbs ergodique dont la désintégration dans les feuilles stables n'est pas singulière par rapport à Lebesgue est un état de su-Gibbs. La stratégie est la même que celle qui nous servira plus tard à prouver des résultats d'unicité.

Soit donc μ un état de u-Gibbs ergodique pour le flot géodésique feuilleté dont la désintégration dans les feuilles stables n'est pas singulière par rapport à Lebesgue.

Il existe un ensemble de mesure pleine pour μ noté $\mathscr{Y}$ tel que pour tout $v \in \mathscr{Y}$ et toute fonction $f : T^1\mathscr{F} \to \mathbb{R}$ continue, l'on ait :

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f \circ G_t(v)\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f \circ G_{-t}(v)\,dt = \int_{T^1\mathscr{F}} f\,d\mu.$$

Par hypothèse, on peut en désintégrant μ dans des plaques stables, trouver un point $v_0 \in \mathscr{Y}$, ainsi qu'un ensemble de Borel $D \subset W^s_{loc}(v_0)$ qui contient v et tel que :

- $\mathrm{Leb}^s(D) > 0$;
- $D \subset \mathscr{Y}$.

Puisque $D \subset \mathscr{Y}$, on prouve que pour tout $y \in D$ la famille de mesures $1/T \int_0^T \delta_{G_{-t}}(v)$ converge vers μ : par le théorème de Fubini, la famille de mesures suivante converge donc vers μ :

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{G_{-t} * (\mathrm{Leb}^s_{|D})}{\mathrm{Leb}^s(D)}\,dt.$$

D'autre part, par le théorème 5.2.2, nous savons que tout point d'accumulation de μ_T (cette famille n'en a qu'un seul : c'est μ) est un état de s-Gibbs. En conclusion, μ est donc à la fois un état de s-Gibbs et de u-Gibbs : c'est un état de su-Gibbs.

Nous avions donc bien prouvé la dichotomie recherchée. La preuve de la proposition 5.4.5, et donc celle du théorème 5.4.2, est donc complète. □

5 | Appendice : absolue continuité des feuilletages invariants des flots hyperboliques feuilletés

Nous allons voir que les résultats classiques de régularité Hölder d'objets associés classiquement aux flots d'Anosov peuvent être généralisés au cadre hyperbolique feuilleté sans mal : nous allons voir que les lemmes de distorsions usuels nécessaires pour prouver ces théorèmes sont encore valides dans ce contexte.

Dans la suite $(M, \mathscr{F})$ est une variété close feuilletée, munie d'une métrique feuilletée variant continûment avec le paramètre transverse. Nous avons également pris un flot hyperbolique feuilleté $\Phi_t : M \to M$. Nous noterons X le champ de vecteurs engendré par Φ_t.

5.1 – Fibrés invariants Höldériens

Nous avons demandé à ce que les fibrés $E^\star$, $\star = s, u, cs, cu$ soient continus. Comme dans [Ba], nous voudrions prouver que ces fibrés varient de façon Hölder.

Theorème 5.5.1. *Soit $(M, \mathscr{F})$ une variété close feuilletée munie d'une métrique feuilleté, ainsi que d'un flot hyperbolique feuilleté. Alors les fibrés invariants $E^\star$, $\star = s, u, cs, cu$, varient de façon uniformément Hölder en restriction aux feuilles.*

Nous rappelons l'idée, qui est une idée dynamique : nous pouvons demander à ce que x et $y \in M$ soient très proches dans une même feuille, de sorte que $\Phi_T(x)$ et $\Phi_T(y)$ soient raisonnablement proches et que, par continuité, il en soit de même pour $E^u(\Phi_T(x))$ et $E^u(\Phi_T(y))$. Alors leurs images par $D\Phi_{-T}$, $E^u(x) = D\Phi_{-T}(E^u(\Phi_T(x)))$ et $E^u(y) = D\Phi_{-T}(E^u(\Phi_T(y)))$, sont exponentiellement plus proches et cela donne un exposant de Hölder pour les fibrés.

Nous ne donnons pas la preuve, qui consisterait à copier l'appendice de Misha Brin du livre [Ba], seulement rappellerons-nous que l'on a besoin de quantités uniformes qui sont :

- l'uniforme continuité des fibrés stables et instables, qui vient de la compacité de la variété ambiente M ;
- la contraction du fibré stable, et l'expansion du fibré instable par le flot, qui viennent de la définition de l'hyperbolicité feuilletée ;
- une borne inférieure du rayon d'injectivité des feuilles, qui vient du fait que, puisque la métrique varie continûment dans la topologie C^∞, toutes les feuilles sont à géométrie uniformément bornée ;
- une borne uniforme sur la norme de la différentielle du temps 1 du flot $D\Phi_1$, ainsi que de son inverse $(D\Phi_1)^{-1}$ sur toute la variété, qui vient de ce que le flot varie continûment dans la topologie C^2.

5.2 – Feuilletages invariants Höldériens

En guise de définition des flots hyperboliques feuilletés, nous pouvons en fait demander l'existence de constantes $C_s, C_u > 1$, et $\chi_{s,1} \leq \chi_{s,2} < 0$, $\chi_{u,1} \geq \chi_{u,2} > 0$, tels que :

$$\begin{cases} C_s^{-1} e^{t\chi_{s,1}} ||v_s|| \leq ||D\Phi_t(v_s)|| \leq C_s e^{t\chi_{s,2}} ||v_s|| & \text{si } v_s \in E^s \text{ et } t \geq 0 \\ C_u^{-1} e^{-t\chi_{u,1}} ||v_u|| \leq ||D\Phi_{-t}(v_u)|| \leq C_u e^{-t\chi_{u,2}} ||v_u|| & \text{si } v_u \in E^u \text{ et } t \geq 0 \end{cases}.$$

Métrique adaptée. Choisissons des nombres $\chi_{s,r} < \chi_{s,1} \leq \chi_{s,2} < \chi_{s,l} < 0$, ainsi que $\chi_{u,r} > \chi_{s,1} \geq \chi_{s,2} > \chi_{s,l} > 0$, où ici les lettres r et l sont utilisées respectivement pour “rapide” et “lent”.

Lemme 5.5.2. *Pour tous choix de nombres $\chi_{\star,\circ}$, $\star = s, u$, $\circ = l, r$, il existe une métrique $|.|$ feuilletée continue, et variant de façon Hölder dans les feuilles de $\mathscr{F}$ telle que :*

1. *E^s X et E^u sont partout deux à deux orthogonaux, et $|X| = 1$;*
2. *pour tout $v_s \in E^s$ et $t \geq 0$ $e^{t\chi_{s,r}}|v_s| \leq |D\Phi_t(v_s)| \leq e^{t\chi_{s,l}}|v_s|$,*
3. *pour tout $v_u \in E^u$ et $t \geq 0$ $e^{-t\chi_{u,r}}|v_s| \leq |D\Phi_{-t}(v_u)| \leq e^{-t\chi_{u,l}}|v_u|$.*

Preuve. Nous n'avons qu'à poser, pour $v_s \in E^s$:

$$|v_s| = \int_{-\infty}^{0} ||D\Phi_t v_s|| e^{-t\chi_{s,r}} dt + \int_{0}^{\infty} ||D\Phi_t v_s|| e^{-t\chi_{s,l}} dt$$

et pour $v_u \in E^u$:

$$|v_u| = \int_{-\infty}^{0} ||D\Phi_t v_u|| e^{-t\chi_{u,l}} dt + \int_{0}^{\infty} ||D\Phi_t v_u|| e^{-t\chi_{u,r}} dt.$$

Ces intégrales convergent par le choix des paramètres, et il est facile de se convaincre que les deuxième et troisième propriétés sont bien vérifiées.

Nous pouvons de plus imposer la première condition, en posant, pour $v = aX + v_s + v_u \in T\mathscr{F}$, $|v|^2 = a^2 + |v_s|^2 + |v_u|^2$: cette métrique n'est alors que Hölder continue, et varie bien continûment avec le paramètre transverse. □

Concrètement, la longueur d'une courbe lisse par morceaux obtenue en concaténant une courbe tangente au feuilletage stable, au feuilletage instable, et au flot, est la somme des longueurs de ces trois composantes. La distance dans les feuilles induite par cette nouvelle métrique est dans la classe de Hölder de celle induite par la métrique feuilletée originale. Ainsi, pour prouver que les applications d'holonomie stable sont Hölder, il suffit de le prouver pour la métrique adaptée.

Holonomies Hölder. Nous pouvons alors prouver que les feuilletages stables et instables sont Hölder (nos constantes sont bien sûr très loin d'être optimales : nous renvoyons à [PSW] pour une étude plus poussée).

Nous n'allons prouver que la Hölder continuité du feuilletage stable. Celle du feuilletage instable s'obtient par un argument symétrique. De plus, nous raisonnons uniquement dans le cas où les transversales sont des variétés centre-instables, mais il suffit de traiter ce cas puisque les transversales au feuilletage stable convergent vers les variétés centre-instables lorsqu'on les pousse par le flot (comme dans le cas uniformément continu).

Proposition 5.5.3. *Il existe des constantes C_0 et θ_0 telles que pour tous $x, y \in M$ sur la même variété centre-instable, appartenant au domaine d'une même transformation d'holonomie stable h_s tels que* $\mathrm{dist}_s(x, h_s(x)) < 1$ *et* $\mathrm{dist}(y, h_s(y)) < 1$, *on ait* $\mathrm{dist}_{cu}(h_s(x), h_s(y)) \leq C_0(\mathrm{dist}_{cu}(x, y))^{\theta_0}$.

Preuve. Par la remarque précédente, il nous suffit de prouver ce fait pour la distance issue de la métrique adaptée. Soit alors x, y comme dans l'énoncé : notons $\gamma = \mathrm{dist}_{cu}(x, y)$ (nous supposons $\gamma < 1$). Par hypothèse, nous avons $\mathrm{dist}_s(x, h_s(x)) < 1$ et $\mathrm{dist}_s(y, h_s(y)) < 1$.

Si x et y sont sur la même trajectoire, alors puisque nous pouvons supposer $||X|| = 1$, et puisque les transformations d'holonomie stable commutent avec le flot, on a $\mathrm{dist}_s(h_s(x), h_s(y)) = \mathrm{dist}_s(x, y)$.

Supposons à présent que x et y soient sur la même variété instable. Notons $x' = h_s(x)$ et $y' = h_s(y)$. Choisissons alors :

$$\theta_1 = \frac{-\chi_{s,l}}{\chi_{u,r} - \chi_{s,l}} < 1.$$

Nous pouvons alors trouver un certain $t > 0$ tel que $\gamma e^{t\chi_{u,r}} = \gamma^{\theta_1}$, et $e^{t\chi_{s,l}} = \gamma^{\theta_1}$: il s'agit de prendre $t = \theta_1 \log\gamma/\chi_{s,l} = (\theta_1 - 1)\log\gamma/\chi_{u,r}$. Nous pouvons alors prouver, par le choix de la métrique adaptée :

$$\mathrm{dist}(\Phi_t(y'), \Phi_t(x')) \leq \mathrm{dist}_s(\Phi_t(y'), \Phi_t(y)) + \mathrm{dist}_s(\Phi_t(x'), \Phi_t(x)) + \mathrm{dist}_u(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) \leq 3\gamma^{\theta_1}.$$

Puisque x'_t et y'_t sont sur la même variété centre-instable, nous trouvons alors que

$$\mathrm{dist}(x', y') \leq \mathrm{dist}(\Phi_t(x'), \Phi_t(y')) \leq 3\gamma^{\theta_1} = 3\mathrm{dist}_{cu}(x, y)^{\theta_1}.$$

□

5.3 – Absolue continuité.

Nous sommes à présent prets à prouver l'absolue continuité du feuilletage stable. Nous rappelons que, dans notre définition de flot hyperbolique feuilleté, nous avons supposé qu'en restriction aux feuilles, le flot est C^2, et que le champ de vecteurs varie de façon continue dans la topologie C^2. Ici encore, nous n'allons traiter que le cas où les transversales sont des variétés centre-instables, le cas général se déduisant comme dans [Man].

Theorème 5.5.4. *Soit $(M, \mathscr{F})$ une variété close feuilletée et $\Phi_t : M \to M$ un flot hyperbolique feuilleté. Alors les applications d'holonomie stable sont absolument continues avec un Jacobien uniformément log-Hölder. Plus précisément, il existe des constantes $C > 0$ et $\theta < 1$ tel que pour tous $x, y \in M$ sur la même variété centre-instable, appartenant au domaine d'une même transformation d'holonomie stable h_s tels que* $\mathrm{dist}_{cu}(x, y) < 1$ $\mathrm{dist}_s(x, h_s(x)) < 1$ *et* $\mathrm{dist}_s(y, h_s(y)) < 1$, *on ait :*

$$|\log \mathrm{Jac}\, h_s(x) - \log \mathrm{Jac}\, h_s(y)| \leq C\mathrm{dist}(x, y)^{\theta}.$$

Idée de preuve. Nous suivons ici la preuve de Mañé, donnée au chapitre 3 de [Man]. Il y a essentiellement deux étapes, reposant sur deux contrôles de distorsion différents.

La première étape est de prouver que la quantité suivante existe :

$$J^s(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Jac}^s\Phi_t(x)}{\mathrm{Jac}^s\Phi_t(h_s(x))}.$$

Nous avons déjà vu le lemme de distorsion qui permet de prouver cela (voir le lemme 6.1.5). Nous avons besoin du fait que le fibré stable varie de façon uniformément Hölder, ainsi que de la continuité de la dérivée $D\Phi_1$ dans la topologie C^1. Nous noterons dans la suite $x' = h_s(x)$.

La seconde étape est plus difficile. Il s'agit de prendre une approximation lisse des transformations d'holonomie stable. Pour ce faire, nous remarquons que chacune des feuilles centre-instables locales possède un fibré normal C^2 qui varie continûment avec la feuille dans la topologie C^2 : cela donne donc un feuilletage local C^2 transverse aux feuilles centre-instables locales. Quitte à renormaliser la métrique, nous pouvons supposer que l'holonomie de ce feuilletage donne une famille de fonctions C^2 $\pi^0_{x\to x'} : W^{cu}_1(x) \to W^{cu}(x')$, lorsque x, x' sont sur la même variété stable à distance au plus 1. Nous pouvons alors trouver une constante $C_1 > 0$ telles que :

$$\mathrm{dist}_L(\pi^0_{x\to x'}(x), x') \le C_1 \mathrm{dist}_L(x, x'). \tag{5.5.13}$$

$$||D_x \pi^0_{x\to x'} - Id|| \le C_1 \mathrm{dist}_L(x, x'). \tag{5.5.14}$$

Puisque la métrique feuilletée varie continûment dans la topologie C^2, cette constante peut être rendue uniforme sur toute la variété (tant que x, x' restent à distance uniformément bornée). En conjuguant par le flot, nous obtenons l'approximation désirée. En notant respectivement x_t et x'_t les images $\Phi_t(x)$ et $\Phi_t(x')$ pour $t > 0$, nous définissons $\pi^t_{x\to x'} = \Phi_{-t} \circ \pi^0_{x_t \to x'_t} \circ \Phi_t$. Par la première inégalité ci-dessus (5.5.13), cette famille converge uniformément vers la transformation d'holonomie h_s lorsque t tend vers l'infini. Afin de prouver que cette application d'holonomie est absolument continue, il suffit alors de prouver que $J^s_t = \mathrm{Jac}\,\pi^t_{x\to x'}$ converge vers J^s (voir le théorème 3.3 de [Man]). Par l'inégalité (5.5.14), le Jacobien de $\pi^0_{x_{-t}\to y_{-t}}$ tend uniformément vers 1, et nous avons :

$$\frac{J^s_t(x)}{J^s(x)} = \frac{\mathrm{Jac}^{cu}\Phi_t(x')}{\mathrm{Jac}^{cu}\Phi_t(\pi^t_{x\to x'}(x))} \mathrm{Jac}\,\pi^0_{x_t\to x'_t}(x_t).$$

Nous aurons donc besoin d'un nouveau contrôle de distorsion, que nous effectuons ci-dessous.

Par hypothèse, $\pi^t_{x\to x'}(x) = \Phi_{-t}(x''_t) = x''$, où nous posons $x''_t = \pi^0_{x_t\to x'_t}(x_t)$. Ainsi, x''_t et x'_t sont sur la même variété centre-instable. De plus, par la majoration (5.5.13), nous avons $\mathrm{dist}_L(x'_t, x''_t) \le C_1 \mathrm{dist}(x_t, x'_t) \le C_1 C_u e^{t\chi_s}$, et lorsque t est assez grand, nous pouvons contrôler $\mathrm{dist}_{cu}(x'_t, x''_t)$ par une exponentielle $C' e^{t\chi_s}$. Puisque x'_t et x''_t appartiennent à la même variété centre-instable, nous avons pour tout $\tau \le t$, $\mathrm{dist}_{cu}(\Phi_{-s}(x'_t), \Phi_{-s}(x_t)'') \le \mathrm{dist}_{cu}(x'_t, x''_t) \le C' e^{t\chi_s}$.

Nous pouvons alors faire le calcul, en utilisant le fait que le fibré centre-instable est uniformément Hölder, et que la dérivée du flot est uniformément C^1 : il existe des constantes K' et θ', telles que, pour n entier assez grand,

$$\begin{aligned} \left|\log \frac{\mathrm{Jac}^{cu}\Phi_n(x')}{\mathrm{Jac}^{cu}\Phi_n(x'')}\right| &\le \sum_{j=0}^{n-1} \left|\log \mathrm{Jac}^{cu}\Phi_1(\Phi_j(x')) - \log \mathrm{Jac}^{cu}\Phi_1(\Phi_j(x''))\right| \\ &\le K' \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{dist}_{cu}(\Phi_j(x'), \Phi_j(x''))^{\theta'} \\ &\le K'(C')^{\theta'} n \exp(\theta' \chi_s n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Ceci nous permet donc de prouver la convergence uniforme de J^s_t vers J^s, et donc l'absolue continuité du feuilletage stable.

Reste à prouver que le Jacobien est uniformément Hölder. Ici encore, il suffit de le prouver pour une métrique adaptée, comme lors de la preuve du lemme 5.5.3. Soit x, y deux points sur la même variété centre-instable à distance $\gamma < 1$. Si x, y sont sur la même orbite, $J^s(y)/J^s(x) \le A \mathrm{dist}_{cu}(x, y)$, où A est une borne supérieure uniforme pour $||D\Phi_t||$, $t \in [-1, 1]$.

Si x et y sont sur la même variété instable, nous pouvons écrire pour tout $t \ge 0$, avec $x_t = \Phi_t(x)$, $y_t = \Phi_t(y)$, $x' = h_s(x)$, $y' = h_s(y)$:

$$\frac{J^s(y)}{J^s(x)} = \frac{J^s(y_t)}{J^s(x_t)} \frac{\mathrm{Jac}^s\Phi_t(y)}{\mathrm{Jac}^s\Phi_t(x)} \frac{\mathrm{Jac}^s\Phi_t(x')}{\mathrm{Jac}^s\Phi_t(y')}.$$

Considérons alors l'exposant que nous avions défini dans la preuve de la proposition 5.5.3 :

$$\theta_1 = \frac{-\chi_{s,l}}{\chi_{u,r} - \chi_{s,l}} < 1.$$

Nous pouvons alors, comme dans la preuve précédente, considérer un temps $t > 0$ tel que $\gamma e^{t\chi_{u,r}} = \gamma^{\theta_1}$, et $e^{t\chi_{s,l}} = \gamma^{\theta_1}$: il s'agit de prendre $t = \theta_1 \log\gamma / \chi_{s,l} = (\theta_1 - 1)\log\gamma/\chi_{u,r}$. Nous avons alors $\mathrm{dist}_u(x_t, y_t) \leq \gamma^{\theta_1}$, et $\mathrm{dist}_s(x_t, x'_t), \mathrm{dist}_s(y_t, y'_t) \leq \gamma^{\theta_1}$.

Par le lemme de distorsion usuel, nous pouvons contrôler le logarithme du premier quotient $J^s(y_t)/J^s(x_t)$ par une quantité de l'ordre de γ^{θ_2} pour un certain $\theta_2 < \theta_1$.

Par un lemme de distorsion analogue à celui que nous avons donné dans un second temps, il existe une constante uniforme $\theta_3 < \theta_1$ telle que nous puissions contrôler le terme $\log \mathrm{Jac}^s \Phi_t(y) - \log \mathrm{Jac}^s \Phi_t(x)$ par une quantité de l'ordre de $t \log \gamma^{\theta_3}$, qui est de l'ordre de $-\log(\gamma)\gamma^{\theta_3}$, et donc contrôlé en particulier par $\gamma^{\theta_3/2}$.

Le troisième facteur paut être contrôlé par une puissance < 1 de γ par le même raionnement que ci-dessus, en utilisant la caractère uniformément Hölder des applications d'holonomie stable (proposition 5.5.3).

Ainsi, nous trouvons des constantes de Hölder uniformes sur M pour le Jacobien des transformations d'holonomie stable. □

Chapitre VI

Mesures de Gibbs et mesures F-harmoniques

1 | Mesures de Gibbs et mesures F-harmoniques pour les fibrés feuilletés

Nous avons déjà vu deux exemples de mesures de Gibbs pour le flot géodésique feuilleté. Les premières étaient les états de H-Gibbs, associées à un potentiel dont la définition fait intervenir le noyau de Poisson. Les secondes étaient les états de u-Gibbs, associés à un potentiel donné par le jacobien instable du flot.

Nous voulons généraliser cette notion de mesures de Gibbs, au moins dans le cas des fibrés feuilletés : c'est-à-dire le cas où le feuilletage est transverse à une fibration au dessus d'une variété close portant un flot d'Anosov C^2 topologiquement mélangeant.

Ensuite, dans le cas particulier où l'on regarde le flot géodésique feuilleté sur l'unitaire tangent d'un feuilletage transverse à une fibration dont les feuilles sont paramétrées par une métrique à courbure sectionnelle négative sur la base, nous allons associer à ces mesures de Gibbs certaines mesures que nous appellerons F-harmoniques.

De même que les mesures de H-Gibbs, et de u-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté sont en bijection respectivement avec les mesures harmoniques et ϕ^u-harmoniques, nous aimerions associer à tout potentiel Hölder F un noyau k^F analogue au noyau de Poisson, qui nous permettrait, par intégration contre une mesure à l'infini, de définir de nouvelles fonctions, appelées F-harmoniques. Nous verrons certaines propriétés de ces fonctions dans la suite.

1.1 – **Relevés de flots d'Anosov**

Dans les deux paragraphes suivants, nous considérons un fibré feuilleté $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$, dont la base B est une variété Riemannienne close, et V est une variété différentielle compacte. Nous supposons que les feuilles de $\mathscr{F}$ sont paramétrées par la métrique Riemannienne de B, de sorte qu'en restriction aux feuilles, la projection Π soit un revêtement Riemannien.

Supposons qu'il existe un flot d'Anosov φ_t de classe C^2 et topologiquement mélangeant sur B. Il est alors possible de relever aux feuilles de $\mathscr{F}$:

- le flot φ_t : pour ce faire, prenons des cartes trivialisant à la fois la fibration et le flot, puis remontons le champ de vecteurs : nous notons Φ_t le *flot hyperbolique feuilleté* ainsi obtenu ;
- les fibrés $E^\star$, $\star = s, u, cs$, ou cu, via la différentielle $D\Pi$; nous notons $\overline{E}^\star$ les fibrés ainsi définis ;
- les feuilletages invariants $\mathscr{W}^\star$, $\star = s, u, cs$, ou cu ; nous notons $\overline{\mathscr{W}}^\star$ les feuilletages ainsi définis : nous obtenons quatre sous-feuilletages de $\mathscr{F}$ qui sont invariants par le flot Φ_t ;
- n'importe quel potentiel Hölder $F : B \to \mathbb{R}$: le potentiel relevé $\overline{F} = F \circ \Pi$ est continu, et reste uniformément Hölder dans les feuilles ;
- toutes les familles de mesures $(\lambda^\star_{F,p})_{p\in B}$ avec $\star = s, u, cs$, ou cu : nous notons $(\bar\lambda)^\star_{F,x}$ les familles obtenues ; elle vérifient la propriété suivante : si $x \in M$, $p = \Pi(x) \in B$, et $D \subset \overline{W}^\star(x)$, on a $\bar\lambda^\star_{F,x}(D) = \lambda^\star_{F,p}(\Pi(D))$.

Nous pouvons de plus relever les cocycles définis par les formules (2.1.1) et (2.1.2) :

$$\bar{k}^s_F(x,y) = \exp\left[\int_0^\infty (\overline{F}\circ\Phi_t(y) - \overline{F}\circ\Phi_t(x))\,dt\right] = k^s_F(\Pi(x),\Pi(y)), \tag{6.1.1}$$

pour x, y dans la même feuille stable $\overline{W}^s$;

$$\bar{k}^u_F(x,y) = \exp\left[\int_0^\infty (\overline{F}\circ\Phi_{-t}(y) - \overline{F}\circ\Phi_{-t}(x))\,dt\right] = k^s_F(\Pi(x),\Pi(y)), \tag{6.1.2}$$

pour x, y dans la même feuille instable $\overline{W}^u$

1.2 – Mesures de Gibbs et hyperbolicité feuilletée

Mesures de Gibbs. La famille de mesures $(\bar\lambda^u_{F,x})_{x\in B}$ sur les variétés instables est quasi-invariante par l'action du flot hyperbolique feuilleté, et les relations de cocycles sont données :

$$\frac{d[\Phi_T * \bar\lambda^u_{F,\varphi_{-T}(x)}]}{d\bar\lambda^u_{F,x}}(y) = \exp\left[\int_0^T (\overline{F}\circ\Phi_{-t}(y) - P(F))\,dt\right], \tag{6.1.3}$$

pour $T \in \mathbb{R}$, $x \in M$, et $y \in \overline{W}^u(x)$.

Définition 6.1.1. *Soit* $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté où* B *est une variété Riemannienne close possédant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant de classe* C^2*, et* V*, une variété différentiable compacte. Supposons que les feuilles soient localement isométriques à la base. Soit* $F : B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder, et* $\overline{F} : M \to \mathbb{R}$ *son relevé. Une mesure de Gibbs pour le flot hyperbolique feuilleté* Φ_t *associée au potentiel* $\overline{F}$ *est une mesure de probabilité* μ *telle que :*

– *μ est invariante par Φ_t ;*
– *μ a une désintégration absolument continue par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^u, \bar\lambda^u_{F,x})$.*

Existence. L'existence de mesures de Gibbs pour Φ_t découle du théorème suivant.

Theorème 6.1.2. *Soit* $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté où* B *est une variété Riemannienne close possédant un flot d'Anosov feuilleté topologiquement mélangeant de classe* C^2*, et* V*, une variété différentiable compacte. Supposons que les feuilles soient localement isométrique à la base. Alors :*

1. *pour tout petit disque $D \subset \overline{W}^u_{loc}(x)$, tout point d'accumulation de :*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\Phi_t * (\bar\lambda^u_{F,x})_{|D}}{\bar\lambda^u_{F,x}(D)}\,dt$$

est une mesure de Gibbs pour Φ_t associée au potentiel $\overline{F}$, dont les densités locales, notées $\bar\psi^u_{F,y}$ sont uniformément log-bornées et vérifient, pour $z_1, z_2 \in W^u_{loc}(y)$:

$$\frac{\psi^u_{F,y}(z_2)}{\psi^u_{F,y}(z_1)} = \exp\left[\int_0^\infty (\overline{F}\circ\Phi_{-t}(z_2) - \overline{F}\circ\Phi_{-t}(z_1))\,dt\right] = \bar k^u_F(z_1, z_2); \tag{6.1.4}$$

2. *la propriété précédente reste vraie si l'on suppose juste que D est un Borélien de mesure positive pour $\bar\lambda^u_{F,x}$;*

3. *les composantes ergodiques d'une mesure de Gibbs associée au potentiel $\overline{F}$ sont encore des mesures de Gibbs pour le même potentiel, de plus les densités dans les plaques instables de cette composante ergodique sont uniformément log-bornées et vérifient la relation (6.1.4) ;*

4. *les densités $\psi^u_{F,x}(y)$ des mesures conditionnelles de toute mesure de Gibbs μ dans les plaques instables $\overline{W}^u_{loc}(x)$ associée à $\overline{F}$ par rapport à $\bar\lambda^u_{F,x}$ sont uniformément log-bornées et vérifient la relation (6.1.4).*

5. *la projection sur B d'une mesure de Gibbs pour Φ_t associée à $\overline{F}$ est μ_F.*

Nous prouverons ce théorème dans le détail dans la section suivante. Le point est de montrer que la section 11.2.2. de [BDV] peut être adaptée à ce contexte.

Nous déduisons la proposition des résultats du chapitre II : associée à toute mesure de Gibbs, il y a une famille de mesures transverses au feuilletage instable vérifiant les propriétés de quasi-invariances suivantes.

Proposition 6.1.3. *Supposons les hypothèses du théorème 6.1.2, et soit μ une mesure de Gibbs pour Φ_t associé au potentiel $\overline{F}$. Soit $\mathscr{A} = (U_i, \phi_i)$ un atlas feuilleté pour $\overline{\mathscr{W}}^u$. Considérons un système complet de transversales associé $(T_i)_{i\in I}$. Alors, il existe une famille de mesures $(\nu_i)_{i\in I}$ sur ces transversales telles que :*

1. *ν_i est équivalente à la projection sur T_i de la restriction $\mu_{|U_i}$ avec une dérivée de Radon-Nikodym qui est log-bornée indépendamment de i ;*
2. *ν_i satisfait à la propriété d'absolue continuité suivante :*

$$\frac{d[\mathrm{hol}^u_{T_i\to T_j} * \nu_i]}{d\nu_j}(y) = \bar{k}^u_F(y, \mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}(y)),$$

pour y appartenant au domaine de $\mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}$.

Mesures induites sur les fibres. Nous pouvons aussi prouver la proposition suivante, qui a trait aux mesures induites par une mesure de Gibbs sur les fibres.

Proposition 6.1.4. *Supposons les hypothèses du théorème 6.1.2. Alors :*

1. *toute mesure de Gibbs pour Φ_t associée au potentiel $\overline{F}$ induit sur la fibre V une mesure laissée quasi-invariante par l'action du groupe d'holonomie de $\mathscr{F}$;*
2. *deux mesures de Gibbs pour Φ_t associées au même potentiel induisent des mesures différentes sur la fibre V.*

Preuve. La preuve de cette proposition est une adaptation immédiate de celle de la proposition 4.3.8 dans le cadre des mesures de H-Gibbs pour le flot géodésique feuilleté. □

1.3 – Preuve de l'existence des mesures de Gibbs

Contrôle de distorsion. Nous aurons besoin du lemme de distorsion suivant, très classique en théorie ergodique, dont nous rappelons la preuve, courte et élémentaire. Nous supposons toutes les hypothèses du théorème 6.1.2.

Lemme 6.1.5. *Soit D un petit disque inclus dans une variété instable de Φ_t. Alors étant donné un réel positif Δ, il existe une constante $K_0 > 1$ telle que pour tout $t \geq 0$, tout ouvert $O\subset\Phi_t(D)$ de diamètre inférieur à Δ, et tout Borélien $X\subset O$, nous ayons, pour $x\in O$:*

$$K_0^{-1}\frac{\bar{\lambda}^u_{F,\Phi_t(x)}(X)}{\bar{\lambda}^u_{F,\Phi_t(x)}(O)} \leq \frac{\Phi_t * \bar{\lambda}^u_{F,x}(X)}{\Phi_t * \bar{\lambda}^u_{F,x}(O)} \leq K_0\frac{\bar{\lambda}^u_{F,\Phi_t(x)}(X)}{\bar{\lambda}^u_{F,\Phi_t(x)}(O)}.$$

Preuve. Nous ne prouvons que la majoration. La minoration suivra par le même argument. Dans un premier temps, nous utilisons le fait que Φ_t laisse quasi-invariante la famille de mesures $(\bar{\lambda}^u_{F,x})_{x\in M}$ et que la dérivée de Radon-Nikodym est donné par $k_{\overline{F},T}(x) = \exp\left[\int_0^T (\overline{F}\circ\Phi_{-t}(x) - P(F))dt\right]$. Ainsi, si O et X sont comme dans le lemme, nous avons :

$$\frac{\Phi_T * \bar{\lambda}^u_{F,x}(X)}{\Phi_T * \bar{\lambda}^u_{F,x}(O)} = \frac{\int_X k_{\overline{F},T} d\bar{\lambda}^u_{F,\Phi_T(x)}}{\int_O k_{\overline{F},T} d\bar{\lambda}^u_{F,\Phi_T(x)}} \leq \frac{\bar{\lambda}^u_{F,\Phi_T(x)}(X)}{\bar{\lambda}^u_{F,\Phi_T(x)}(O)} \operatorname*{Sup}_{y_1,y_2\in O} \frac{k_{\overline{F},T}(y_1)}{k_{\overline{F},T}(y_2)}.$$

Le logarithme du dernier quotient est exactement donné par l'intégrale $\int_0^T (\overline{F}\circ\varphi_{-t}(y_1) - \overline{F}\circ\varphi_{-T}(y_2))ds$.

En utilisant la continuité de Hölder de la fonction $\overline{F}$ dans les variétés instables, nous voyons que cette intégrale est, en valeur absolue, majorée par

$$C\int_0^T \operatorname{dist}_u(\Phi_{-t}(y_1), \Phi_{-t}(y_2))^\alpha dt$$

En utilisant le fait que le flot contracte uniformément le feuilletage instable par itération négative, nous trouvons que cette intégrale est inférieure à :

$$CC_u^\alpha\Delta^\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha\chi_u t}dt = \frac{CC_u^\alpha\Delta^\alpha}{\alpha\chi_u} < \infty.$$

Nous pouvons ainsi conclure la preuve du lemme. □

Composantes markoviennes et effets de bords. Nous allons donner la preuve de la première propriété du théorème 6.1.2. Considérons donc un disque $D \subset \overline{W}^u_{loc}(x)$ pour un certain x. Nous pouvons supposer sans restriction que $\bar{\lambda}^u_{F,x}(D) > 0$, alors que $\bar{\lambda}^u_{F,x}(\partial D) = 0$.

Soit $U_i = \bigcup_{y\in T_i} P_i(y)$ une carte feuilletée pour le feuilletage instable dont toutes les plaques $P_i(y)$ sont des petits disques de diamètre uniformément majoré par un certain $\Delta > 0$, et supposons que $\Phi_t(D)$ rencontre U_i pour un certain $t \geq 0$. Nous dirons qu'une composante connexe de l'intersection $\Phi_t(D) \cap U_i$ est *markovienne* si elle croise entièrement la carte U_i, autrement dit, si c'est une plaque $P_i(y)$. Si $\widehat{D}_{t,M,i}$ désigne l'union des composantes connexes markoviennes de $U_i \cap \Phi_t(D)$, et si $\widehat{D}_{t,NM,i}$, désigne celle des composantes non markoviennes, nous avons :

$$\Phi_t(D) \cap U_i = \widehat{D}_{t,M,i} \cup \widehat{D}_{t,NM,i}.$$

Une composante connexe non markovienne de $\Phi_t(D) \cap U_i$ est incluse dans le Δ-voisinage du bord $\partial\Phi_t(D)$, il en est donc de même de leur union $\widehat{D}_{t,NM,i}$. De sorte que la propriété de contraction du flot entraîne que $\Phi_{-t}(\widehat{D}_{t,NM,i})$ est inclus dans le $C_u e^{-t\chi_u}\Delta$-voisinage de ∂D. Nous en déduisons le lemme suivant.

Lemme 6.1.6. *Soit μ un point d'accumulation de la famille de mesures $(\mu_T)_{T\geq 0}$: il existe une suite (T_k) telle que $\mu_{T_k} \to \mu$ pour la convergence faible-$*$. Soit U_i une carte feuilletée pour le feuilletage instable satisfaisant aux conditions $\mu(U_i) > 0$ et $\mu(\partial U_i) = 0$, de sorte que $(\mu_{T_k})_{|U_i} \to \mu_{|U_i}$. Notons $\mu_{k,M,i}$, la restriction des mesures $(\mu_{T_k})_{|U_i}$ à l'union des composantes markoviennes de $\Phi_t(D) \cap U_i$, et $\mu_{k,NM,i}$ celle aux composantes non markoviennes de $\Phi_t(D) \cap U_i$, pour $t \leq T_k$. Alors :*

$$\mu_{k,M,i} \to \mu_{|U_i} \qquad et \qquad \mu_{k,NM,i} \to 0.$$

Preuve. Les $C_u e^{-t\chi_u}\Delta$-voisinages du bord ∂D forment une suite décroissante d'ouverts, dont l'intersection est exactement ∂D, et qui est de mesure nulle pour $\bar{\lambda}^u_{F,x}$. Nous en déduisons que, sous les hypothèses du lemme, la masse de $\mu_{k,NM,i}$ tend vers zéro et, puisque $(\mu_{T_k})_{|U_i} = \mu_{k,M,i} + \mu_{k,NM,i}$, la mesure $\mu_{k,M,i}$ converge vers $\mu_{|U_i}$. □

Borner les densités locales. Nous supposons ici que μ est limite de mesures μ_{T_k}. Que μ soit invariante par le flot est un argument classique à la Krylov-Bogoliubov. Soit U_i une carte feuilletée pour le feuilletage instable, dont les plaques sont des petits disques de diamètre uniformément majoré par Δ. Nous supposons, comme dans le lemme précédent, que $\mu(U_i) > 0$ et $\mu_{U_i}(\partial U_i) = 0$, de sorte que la convergence précédente soit également valide en restriction à la carte.

Par le lemme précédent, nous pouvons nous restreindre à l'étude des restrictions aux composantes Markoviennes. Pour prouver que la restriction de μ à U_i a des mesures conditionnelles dans les plaques qui sont absolument continues par rapport à $\bar{\lambda}^u_{F,x}$, avec des densités uniformément log-bornées, il nous faut borner les logarithmes des densités dans les plaques de U_i des mesures conditionnelles de $\mu_{k,M,i}$.

Pour $t > 0$ rencontrant U_i, nous poserons $m_{t,M,i}$, la restriction de la mesure $\Phi_t * (\bar{\lambda}^u_{F,x})_{|D} / \bar{\lambda}^u_{F,x}(D)$ à $\widehat{D}_{t,M,i}$, de sorte que l'on ait :

$$\mu_{k,M,i} = \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} m_{t,M,i}\, dt.$$

Lemme 6.1.7. *Les densités des mesures $m_{t,M,i}$ (lorsque cette mesure est non nulle) dans les plaques instables sont équivalentes à $\bar{\lambda}^u_{F,x}$ avec des densités uniformément log-bornées indépendamment de t.*

Preuve. L'ensemble $\widehat{D}_{t,M,i}$ est une union finie de plaques instables de U_i. Lorsque cette intersection est non vide, la projection de $m_{t,M,i}$ sur la transversale T_i est donnée par une mesure de comptage $\nu_{t,i}$ associant à un point $y \in T_i \cap \widehat{D}_{t,M,i}$ la masse $\Phi_t * (\bar{\lambda}^u_{F,x})_{|D}(P_i(y)) / \bar{\lambda}^u_{F,x}(D)$. Ainsi, les mesures conditionnelles dans une telle plaque $P_i(y)$ sont-elles données par :

$$\frac{\Phi_t * (\bar{\lambda}^u_{F,x})_{|D}}{\Phi_t * (\bar{\lambda}^u_{F,x})_{|D}(P_i(y))}.$$

Par le lemme de contrôle de distorsion 6.1.5, cette mesure a une densité par rapport à $\bar{\lambda}^u_{F,x}$, qui est log-bornée indépendamment de t. Nous pouvons donc conclure la preuve du lemme. □

Preuve de la première partie du théorème 6.1.2. Nous pouvons à présent conclure la preuve de la première partie du théorème. Si μ est un point d'accumulation de μ_T, nous pouvons recouvrir M par un nombre fini de cartes feuilletées U_i pour $\overline{\mathscr{W}}^u$, dont toutes les plaques sont de petits disques de diamètre uniformément majoré, telles que pour tout i, $\mu_i(\partial U_i) = 0$. Par ce qui précède, pour tout i tel que $\mu(U_i) > 0$, nous avons une famille de mesures finies $(\mu_{k,M,i})$ sur U_i telle que :

- $\mu_{k,M,i}$ converge vers $\mu_{|U_i}$ quand k croît indéfiniment;
- les mesures conditionnelles de $\mu_{k,M,i}$ dans les plaques instables ont une densité uniformément log-bornée par rapport à $\bar{\lambda}^u_{F,x}$.

Pour voir la seconde propriété, il n'y a qu'à remarquer que les mesures conditionnelles de $\mu_{k,M,i}$ dans les plaques instables sont données par les moyennes de Césaro de celles des $m_{t,M,i}$, $t \leq T_k$, qui sont log-bornées par le lemme 6.1.7. Un argument standard de théorie de la mesure entraîne alors que la mesure $\mu|U_i$ a une désintégration dans les plaques instables équivalente par rapport à $\bar{\lambda}^u_{F,x}$ avec des densités bornées.

Pour voir que les densités satisfont aux relations (6.1.4), il suffit d'utiliser l'invariance de μ, ainsi que sa désintégration dans les cartes. □

Preuve de la deuxième partie du théorème 6.1.2. Nous allons appliquer le théorème de densité de Borel dans les variétés instables : nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 de [Matt] pour l'énoncé et la preuve de ce théorème. Il implique en particulier que si $D\subset\overline{W}^u_{loc}(x)$ est un Borélien de mesure positive pour $\bar\lambda^u_{F,x}$, alors pour tout $\delta>0$, il existe une collection de petits disques disjoints $D_1,\dots,D_s$ tel que :

- pour tout j, $\bar\lambda^u_{F,x}(D_j\setminus D)\le\delta\bar\lambda^u_{F,x}(D_j)$,
- $\bar\lambda^u_{F,x}(D\setminus\bigcup_j D_j)\le\delta\bar\lambda^u_{F,x}(D)$.

Nous pouvons alors écrire, pour $t>0$:

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_t*(\bar\lambda^u_{F,x})_{|D}}{\bar\lambda^u_{F,x}(D)} &= \sum_{j=1}^s\frac{\bar\lambda^u_{F,x}(D_j)}{\bar\lambda^u_{F,x}(D)}\frac{\Phi_t*(\bar\lambda^u_{F,x})_{|D_j}}{\bar\lambda^u_{F,x}(D_j)}\\ &+\frac{\Phi_t*(\bar\lambda^u_{F,x})_{|D\setminus\bigcup_j D_j}}{\bar\lambda^u_{F,x}(D)}-\frac{1}{\bar\lambda^u_{F,x}(D)}\sum_{j=1}^s\Phi_t*(\bar\lambda^u_{F,x})_{|D_j\setminus D}.\end{aligned}$$

Les masses totales des deux dernières mesures ne dépendent pas de t, et sont chacune inférieure à δ. Ainsi, un point d'accumulation de la famille $(\mu_T)_{T\ge0}$ ne diffère que d'une mesure de masse totale inférieure à δ d'un point d'accumulation de la famille :

$$\sum_{j=1}^s\frac{\bar\lambda^u_{F,x}(D_j)}{\bar\lambda^u_{F,x}(D)}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\Phi_t*(\bar\lambda^u_{F,x})_{|D_j}}{\bar\lambda^u_{F,x}(D_j)}dt.$$

Mais en appliquant la première partie du théorème, un tel point d'accumulation a une désintégration absolument continue par rapport à $(\overline{\mathscr W}^u,\bar\lambda^u_{F,x})$ avec des densités uniformément bornées, indépendamment de δ et du choix des D_j, et qui vérifient les relations (6.1.4). En faisant tendre δ vers zéro, nous pouvons conclure la preuve de la deuxième propriété du théorème. □

Preuve de la troisième partie du théorème 6.1.2. Nous voulons à présent prouver que les composantes ergodiques des mesures de Gibbs associées au potentiel $\overline{F}$ sont encore des mesures de Gibbs associées au même potentiel. Soit $\mathscr R$ l'ensemble des points réguliers, c'est-à-dire l'ensemble des points dont les moyennes de Birkhoff dans le passé et le futur convergent et coïncident pour toute fonction continue. C'est un ensemble plein pour toute mesure invariante par Φ_t.

En particulier, si μ est une mesure de Gibbs associée à $\overline{F}$, puisque la désintégration de μ est absolument continue par rapport à $(\overline{\mathscr W}^u,\bar\lambda^u_{F,x})$, μ-presque tout point de M est inclus dans une plaque instable $P_i(x)$ dont l'intersection avec $\mathscr R$ forme un ensemble de mesure strictement positive pour $\bar\lambda^u_{F,x}$.

D'autre part, les moyennes de Birkhoff dans le passé des éléments de $\mathscr R\cap P_i(x)$ convergent toutes vers la même mesure μ_x qui est une composante ergodique de μ. Une application élémentaire de la convergence dominée implique donc que μ_x est limite de la famille de mesures

$$\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\Phi_t*(\bar\lambda^u_{F,x})_{\mathscr R\cap P_i(x)}}{\bar\lambda^u_{F,x}(\mathscr R\cap P_i(x))}dt,$$

et, par la deuxième partie du théorème, est une mesure de Gibbs associée à $\overline{F}$, dont les densités sont uniformément log-bornées et vérifient les relations (6.1.4). Nous pouvons donc conclure la preuve de la troisième partie du théorème. □

Preuve de la quatrième partie du théorème 6.1.2. Notons que toute mesure de Gibbs associée à $\overline{F}$ s'écrit comme mesure combinaison convexe de mesures de Gibbs ergodiques qui en conséquence possèdent des densités uniformément log-bornées dans les variétés instables locales par rapport à $\bar{\lambda}^u_{F,x}$, et qui vérifient les relations (6.1.4).

Les densités locales d'une mesure de Gibbs sont alors des combinaisons convexes de densités vérifiant ces propriétés : elles les vérifient également. Nous pouvons donc conclure. □

Preuve de la dernière partie du théorème 6.1.2. Nous pouvons conclure la preuve du théorème en utilisant le théorème 2.1.9, qui dit que l'état de Gibbs μ_F est l'unique mesure invariante par φ_t qui a une désintégration absolument continue par rapport à $(\mathscr{W}^u, \lambda^u_{F,p})$.

Puisque par définition, Π projette Φ_t sur φ_t, les feuilles de $\overline{\mathscr{W}}^u$ sur celles de $\mathscr{W}^u$, et les mesures $\bar{\lambda}^u_{F,x}$ sur les $\lambda^u_{F,p}$, la projection d'une mesure de Gibbs sur B est invariante par φ_t et a une désintégration absolument continue par rapport à $(\mathscr{W}^u, \lambda^u_{F,p})$: c'est donc l'état de Gibbs μ_F.

1.4 – Mesures F-harmoniques

Jusqu'à la fin de la section, B désignera une variété Riemannienne close courbée négativement, et V sera une variété différentiable compacte. Le revêtement universel Riemannien de B sera noté N. Nous considèrerons un fibré feuilleté $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$, dont les feuilles sont localement isométriques à la base. Ainsi, il existe un fibré feuilleté $(D\Pi, T^1\mathscr{F}, T^1B, V, \widehat{\mathscr{F}})$. De plus, la restriction de $D\Pi$ aux T^1L est une isométrie locale pour la métrique de Sasaki.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, il est possible de relever le flot géodésique g_t aux feuilles de $\widehat{\mathscr{F}}$, et puisque Π est une isométrie locale, le flot que l'on obtient est le flot géodésique feuilleté G_t, et les feuilletages invariants $\overline{\mathscr{W}}^\star$ ($\star = s, u, cs, cu$), sont les sous-feuilletages horosphériques.

Cocycles associés à un potentiel Hölder. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder : nous désignerons par $\widetilde{F}$ son relevé à N. Nous définissons un premier cocycle sur $N \times N \times N(\infty)$ par la formule suivante :

$$\delta^F(z_1, z_2; \xi) = \exp\left[\int_\xi^{z_2} \widetilde{F} - \int_\xi^{z_1} \widetilde{F}\right], \tag{6.1.5}$$

et nous rappelons, par souci de commodité, que la différence des intégrales est comprise comme la limite lorsque T tend vers l'infini de $\int_{c(T)}^{z_2} \widetilde{F} - \int_{c(T)}^{z_1} \widetilde{F}$, où c est *n'importe quel* rayon géodésique pointant vers ξ, et les intégrales sont prises sur le flot géodésique entre $c(T)$ et z_i, $i = 1, 2$.

Le noyau suivant, qui est obtenu en normalisant δ^F par le cocycle de Busemann, nous intéressera tout particulièrement :

$$k^F(z_1, z_2; \xi) = \delta^F(z_1, z_2; \xi) e^{-P(F)\beta_\xi(z_1, z_2)}. \tag{6.1.6}$$

Nous rappelons que $P(F)$ est la pression de F. Nous rappelons également que lorsque z_1 et z_2 sont sur la même horosphère centrée en ξ, le cocycle de Busemann s'annule, et nous avons $k^F(z_1, z_2; \xi) = \delta^F(z_1, z_2; \xi)$. Les relations de cocycles suivantes sont alors évidemment vérifiées :

$$\delta^F(z_1, z_2; \xi)\delta^F(z_2, z_3; \xi) = \delta^F(z_1, z_3; \xi), \quad \text{et} \quad k^F(z_1, z_2; \xi)k^F(z_2, z_3; \xi) = k^F(z_1, z_3; \xi) \tag{6.1.7}$$

lorsque $z_i \in N$, $i = 1, 2, 3$ et $\xi \in N(\infty)$.

Par exemple, nous pouvons décrire les noyaux k^F associés aux trois exemples de base.

– Le noyau associé à la fonction nulle est $k^0(z_1, z_2; \xi) = e^{-h\beta_\xi(z_1, z_2)}$, où h désigne l'entropie topologique du flot géodésique g_t.

– Le noyau associé au potentiel $\phi^u(v) = -d/dt|_{t=0} \log \mathrm{Jac}^u g_t(v)$ est :

$$k^u(z_1, z_2; \xi) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Jac}^u G_{-t-\beta_\xi(z_1,z_2)}(v_{\xi,z_2})}{\mathrm{Jac}^u G_{-t}(v_{\xi,z_1})}.$$

– Le noyau associé à $H(v) = d/dt|_{t=0} \log k(c_v(0), c_v(t); c_v(-\infty))$ est le noyau de Poisson.
Notons que les deux derniers potentiels ont une pression nulle (voir [BR] pour le premier, et [L1] pour le second).

Mesures F-harmoniques. Le noyau k^F jouera dans la suite le rôle du noyau de Poisson. Nous nous intéressons à la classe de fonctions suivante N, que nous appelons *F-harmoniques* et que nous définissons ci-dessous.

Définition 6.1.8. *Soit B une variété Riemannienne close courbée négativement, et N son revêtement universel Riemannien. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder, et fixons un point base $o \in N$. Une fonction positive $h : N \to (0, \infty)$ sera dite F-harmonique s'il existe une mesure de Borel finie η_o sur $N(\infty)$ telle que pour tout $z \in N$,*

$$h(z) = \int_{N(\infty)} k^F(o, z; \xi)\, d\eta_o(\xi).$$

La projection d'une fonction F-harmonique sur un quotient de N sera encore appelée F-harmonique.

Remarque 1. Cette définition ne dépend pas du choix du point base o, en effet, à cause de la relation de cocycle (6.1.7) : cette définition marcherait avec n'importe quel point $o' \in N$ en posant $\eta_{o'}(\xi) = k_F(o, o'; \xi)\eta_o(\xi)$.

Remarque 2. Le théorème de Ledrappier 2.1.10 nous dit qu'il existe, à une constante multiplicative près, une unique famille de mesures finies sur $N(\infty)$, que l'on avait notée $(\nu_z^F)_{z\in N}$ telle que :
- elle est équivariante : pour tout $\gamma \in \pi_1(B)$, nous avons $\gamma * \nu_z^F = \nu_{\gamma z}^F$
- elle satisfait la relation de cocycle $k^F(z_1, z_2; \xi) = d\nu_{z_2}^F / d\nu_{z_1}^F(\xi)$ pour tous $z_1, z_2 \in N$.

Ainsi, avons nous pour tout $z \in N$, $\mathrm{mass}(\nu_z^F) = \int_{N(\infty)} k^F(o, z; \xi) d\nu_o^F(\xi)$: la fonction $\tilde{h}_0 : z \mapsto \mathrm{mass}(z)$ est F-harmonique et elle passe au quotient. Par conséquent, la fonction quotient est F-harmonique sur B, et est notée h_0^F. Nous prouverons plus tard que c'est l'unique fonction F-harmonique sur B : c'est le théorème 6.1.20

Nous pouvons à présent définir la notion de mesure F-harmonique pour les fibrés feuilletés.

Définition 6.1.9. *Soit $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté où B est une variété Riemannienne close et courbée négativement, et V est une variété différentielle compacte. Supposons de plus que les feuilles de $\mathscr{F}$ soient localement isométriques à la base B. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Une mesure de probabilité m sur M est dite F-harmonique si elle a une désintégration dans les feuilles de $\mathscr{F}$ absolument continue par rapport à Lebesgue, et si les densités dans les plaques de $\mathscr{F}$ sont F-harmoniques.*

Prouver l'existence de telles mesures sera l'objet de la section suivante (voir le théorème 6.1.18).

Remarque 3. Ici encore, la notion de mesure F-harmonique généralise la notion de mesure transverse invariante par holonomie. Lorsque l'on a une telle mesure dans une fibre, on peut toujours la combiner dans les cartes locales avec la mesure sur B ayant une densité h_0^F par rapport à Lebesgue : la mesure que l'on obtient alors est F-harmonique.

1.5 – Correspondance bijective entre mesures de Gibbs et mesures F-harmoniques

Nous supposons ici toutes les hypothèses du paragraphe précédent. Le but de cette partie est de prouver le théorème suivant.

Theorème 6.1.10. *Soit $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté où B est une variété Riemannienne close et courbée négativement, et V est une variété compacte. Supposons que les feuilles de $\mathscr{F}$ soient localement isométriques à B. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder, et $\overline{F} : T^1\mathscr{F} \to \mathbb{R}$ un relevé. Alors il existe une correspondance bijective entre mesures de Gibbs associé au potentiel $\overline{F}$ et les mesures F-harmoniques.*

Désintégration dans les plaques centre-instables. Rappelons que nous avons défini une famille $(\bar{\lambda}^{cu}_{H,v})_{v \in T^1\mathscr{F}}$ de mesures dans les feuilles de $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$ par intégration des mesures $\bar{\lambda}^{u}_{H,G_t(v)}$ contre l'élément dt du flot.

Lemme 6.1.11. *Soit μ une mesure de Gibbs pour G_t associé au potentiel $\overline{F}$. Alors μ a une désintégration absolument continue par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^{cu}, \bar{\lambda}^{cu}_{F,v})$. De plus, les densités locales, que l'on note $\psi^{cu}_{F,v}$ sont uniformément log-bornées dans les plaques et vérifient :*

$$\frac{\psi^{cu}_{F,v}(w_2)}{\psi^{cu}_{F,v}(w_1)} = k^F(w_1, w_2; \xi), \tag{6.1.8}$$

où $w_1, w_2 \in \overline{W}^{cu}_{loc}(v)$, $\xi \in N(\infty)$ est la limite commune des itérations dans le passé d'éléments de $\overline{W}^{cu}_{loc}(v)$.

Bien entendu, la notation est quelque peu abusive : nous devons évaluer k^F sur les relevés des points bases de w_1 et w_2 appartenant à un même domaine fondamental.

Preuve. La mesure μ est invariante par le flot et a une désintégration absolument continue par rapport à $(\overline{W}^{u}, \bar{\lambda}^{u}_{F,x})$, donc la première partie du lemme est vraie.

Nous trouvons des bornes uniformes pour les logarithmes des densités locales en utilisant celles données par le théorème 6.1.2, ainsi que les bornes sur le diamètre des plaques centre-instables.

Que les densités vérifient les relations de cocycles (6.1.8) n'est pas très dur à vérifier à partir du théorème 6.1.2, et par l'invariance par le flot. En effet, si w_1, w_2 appartiennent à la même variété instable locale, on a $\beta_\xi(w_1, w_2) = 0$, et (6.1.8) est exactement la relation (6.1.4). Si $w_2 = G_T(w_1)$, nous avons $\beta_\xi(w_1, w_2) = -T$ et la relation (6.1.8) vient de l'invariance par le flot (on utilise ici que $(\bar{\lambda}^{cu}_{F,v})_{v \in M}$ satisfait les mêmes relations (6.1.3) que $(\bar{\lambda}^{u}_{F,v})_{v \in M}$). □

Reparamétrage des mesures de Gibbs. Comme nous l'avons déjà fait lors de notre étude des mesures de H-Gibbs, nous allons définir les mesures ∞-F-harmoniques pour $\widetilde{\mathscr{W}}^{cu}$ et prouver qu'elles peuvent être obtenues par reparamétrage des mesures de Gibbs dans les variétés centre-instables. Souvenons-nous que l'identification $T^1N \simeq N \times N(\infty)$ trivialise le feuilletage instable. Fixons un point base $o \in N$. À une variété centre-instable $N \times \{\xi_0\}$, nous associons la mesure ξ_0-F-harmonique :

$$m^F_{\xi_0} = k^F(o, z; \xi_0) \mathrm{Leb}_{N \times \{\xi_0\}}.$$

Définition 6.1.12. *Soit B une variété Riemannienne close et courbée négativement, et soit N son revêtement universel Riemannien. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder, et $o \in N$ un point base fixé. Une mesure de Borel $\tilde{m}^+_F$ sur N est dite ∞-F-harmonique pour $\widetilde{\mathscr{W}}^{cu}$ sa désintégration dans les variétés centre-instables, identifiées avec les $N \times \{\xi\}$, dont les mesures conditionnelles sont données par les m^F_ξ.*

Les passages au quotient de mesures ∞-F-harmoniques sur les quotients de N seront encore appelées mesures ∞-F-harmoniques.

Définition 6.1.13. *Soit* $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté où* B *est une variété Riemannienne close et courbée négativement, et* V *est une variété différentiable compacte. Supposons que les feuilles de* $\mathscr{F}$ *sont localement isométriques à la base* B. *Soit* $F : T^1B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder. Une mesure de probabilité* m_F^+ *sur* $T^1\mathscr{F}$ *est dite* ∞-F*-harmonique pour* $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$ *si les mesures conditionnelles dans les plaques de* $\widehat{\mathscr{F}}$ *sont* ∞-F*-harmoniques pour* $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$.

Proposition 6.1.14. *Soit* $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté où* B *est une variété Riemannienne close et courbée négativement, et* V *est une variété différentiable compacte. Supposons que les feuilles de* $\mathscr{F}$ *sont localement isométriques à la base* B. *Soit* $F : T^1B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder, et* $\overline{F} : T^1\mathscr{F} \to \mathbb{R}$ *son relevé.*

Alors pour toute mesure μ *pour* G_t *associée au potentiel* $\overline{F}$, *il y a une unique mesure* ∞-F*-harmonique pour* $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$ m_F^+ *qui induit sur la fibre* V *la même mesure que* μ.

Réciproquement, pour toute mesure ∞-F*-harmonique pour* $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$, m_F^+, *il existe une unique mesure de Gibbs* μ *pour* G_t *associée au potentiel* $\overline{F}$ *qui induit sur la fibre* V *la même mesure que* m_F^+.

Preuve. La preuve de cette proposition suit les mêmes lignes que celle de la proposition 4.3.8. Il faut voir alors que, par le lemme 6.1.11, les densités locales satisfont les relations (6.1.8). Ainsi, toute mesure de Gibbs peut être désintégrée dans les plaques centre-instables de telles sortes que les densités locales soient données par $k^F(o, v; \xi)\bar{\lambda}^{cu}_{F,v}$. □

La proposition suivante et une conséquence immédiate :

Proposition 6.1.15. *Sous les hypothèses de la proposition 6.1.14, nous avons :*

1. *toute mesure* ∞-F*-harmonique pour* $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$ *induit sur la fibre* V *une mesure laissée quasi-invariante par l'action du groupe d'holonomie de* $\mathscr{F}$ *;*
2. *deux mesures* ∞-F*-harmoniques pour* $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$ *différentes induisent des mesures differentes sur la fibre* V.

Preuve. C'est une conséquence immédiate des propositions 6.1.4 et 6.1.14 □

Relevés canoniques des mesures F-harmoniques. La preuve du lemme suivant suit exactement les lignes de celle du lemme 4.3.3.

Lemme 6.1.16. *Soit* B *une variété Riemannienne close courbée négativement, et* N *son revêtement universel Riemannien. Soit* $F : T^1B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder. Alors la projection sur* N *de toute mesure* ∞-F*-harmonique sur* T^1N *est une mesure* F*-harmonique : elle a une densité* F*-harmonique par rapport à Lebesgue.*

Ainsi, nous avons la conséquence suivante :

Lemme 6.1.17. *Soit* $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté où* B *est une variété Riemannienne close et courbée négativement, et* V *est une variété différentiable compacte. Supposons que les feuilles de* $\mathscr{F}$ *soient localement isométriques à la base* B. *Soit* $F : T^1B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder. Alors la projection sur* M *le long des sphères tangentes à* $\mathscr{F}$ *d'une mesure* ∞-F*-harmonique pour* $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$ *est une mesure* F*-harmonique pour* $\mathscr{F}$.

Puisque nous savons, par le théorème 6.1.2, que les mesures de Gibbs pour G_t existent pour tout potentiel Hölder $F : T^1B \to \mathbb{R}$, et puisque nous savons, par la proposition 6.1.14, que ces mesures sont en correspondance bijective avec les mesures ∞-F-harmoniques, nous déduisons du lemme précédent le théorème d'existence suivant :

Theorème 6.1.18. *Soit* $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté où* B *est une variété Riemannienne close et courbée négativement, et* V *est une variété différentiable compacte. Supposons que les feuilles de* $\mathscr{F}$ *soient localement isométriques à la base* B*. Alors, les mesures* F*-harmoniques pour* $\mathscr{F}$ *existent pour tout potentiel Hölder* $F : T^1B \to \mathbb{R}$.

À présent, donnons quelques notations analogues à celles données au chapitre IV. Nous noterons :

- $pr : T^1\mathscr{F} \to M$ la projection canonique le long des sphères tangentes ;
- $\mathscr{H}ar^F(\mathscr{F})$ l'ensemble des mesures F-harmoniques pour $\mathscr{F}$;
- $\mathscr{H}ar^F_\infty(\overline{\mathscr{W}}^{cu})$ l'ensemble des mesures ∞-F-harmoniques pour $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$.

Proposition 6.1.19. *Soit* $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté où* B *est une variété Riemannienne close et courbée négativement, et* V *est une variété différentiable compacte. Supposons que les feuilles de* $\mathscr{F}$ *soient localement isométriques à la base* B*. Soit* $F : T^1B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder. Alors, la fonction* $pr_* : \mathscr{H}ar^F_\infty(\overline{\mathscr{W}}^{cu}) \to \mathscr{H}ar^F(\mathscr{F})$ *associant à toute mesure* F*-*∞*-harmonique* m^+ *sa projection sur* M*,* $pr * m^+$*, est une bijection.*

Lorsque $m_F^+ \in \mathscr{H}ar_\infty$*, et* $m_F = pr * m_F^+$*, nous appellerons* m_F^+ *le relevé canonique de* m_F *à* $T^1\mathscr{F}$.

Preuve. La preuve est complètement identique à celle de la proposition 4.3.5. Nous devons utiliser le lemme de Ghys 1.3.3 pour prouver que les densités locales d'une mesure F-harmonique peuvent être étendues, et que les extensions sont encore des fonctions F-harmoniques. À présent, nous pouvons dérouler les mesures exactement comme dans la proposition 4.3.5 : cela prouve que l'application pr_* est surjective.

Puisque, de plus, nous savons par la proposition 6.1.15 que deux mesures ∞-F-harmoniques différentes induisent des mesures différentes sur la fibre, cela entraîne que l'application pr_* est injective. Nous pouvons donc conclure □

Fin de la preuve du théorème 6.1.10. Par la proposition 6.1.14, il existe, pour toute mesure ∞-F-harmonique pour $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$, une unique mesure de Gibbs pour G_t associée au potentiel $\overline{F}$ qui induit la même mesure sur la fibre.

Par la proposition 6.1.19, la projection canonique $pr : T^1\mathscr{F} \to M$ induit une bijection entre les mesures ∞-F-harmoniques pour $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$, et les mesures F-harmoniques pour $\mathscr{F}$.

Nous pouvons alors conclure la preuve du théorème : il y a une correspondance bijective entre les mesures F-harmoniques et les mesures de Gibbs pour G_t associées au potentiel $\overline{F}$. □.

Fonctions F-harmoniques sur une variété compacte. Nous savons que les seules fonctions harmoniques sur une variété compacte sont les fonctions constantes : nous avons donné un argument au chapitre III.

Nous rappelons que nous avons défini sur toute variété close et courbée négativement l'existence d'une fonction F-harmonique, et ce pour tout potentiel Hölder : nous les avons définies en prenant les masses des mesures de Ledrappier $(\nu_z^F)_{z \in N}$ (voir le théorème 2.1.10)). Nous avions noté cette fonction h_0^F. De manière analogue au cas des fonctions harmoniques, nous pouvons prouver :

Theorème 6.1.20. *Soit* B *une variété close et courbée négativement. Soit* $F : T^1B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder. Alors toute fonction* F*-harmonique function sur* B *est un multiple positif de* h_0.

Preuve. Le théorème 6.1.10 est même vrai lorsque V est singleton : cela revient à dire qu'il y a une bijection entre les mesures F-harmoniques sur B et les états de Gibbs pour le flot géodésique g_t associés à F. Mais un tel état de Gibbs est unique (voir le théorème 2.1.7).

Ainsi, la densité de l'unique mesure F-harmonique sur B est déterminée, à multiplication près par une constante positive. En d'autre termes, il y a une unique fonction F-harmonique, à constante mltiplicative près : c'est h_0^F. □

2 | Théorème de Fatou pour les fonctions F-harmoniques

2.1 – Énoncé du théorème

Le but ici sera de montrer un analogue du théorème de Fatou pour les fonctions F-harmoniques : nous étudions la convergence non tangentielle de ces fonctions à l'infini, montrant ainsi que la classe de fonctions introduite précédemment n'est pas si artificielle qu'il n'y paraît de prime abord. La preuve est une adaptation de celle du théorème de Fatou pour les fonctions harmoniques positives en courbure négative pincée donnée par Anderson et Schoen dans [AS], et utilise certains des outils développés récemment pour l'étude des états d'équilibre en courbure négative (en particulier l'utilisation systématique du lemme de l'ombre) : voir par exemple [L3, Mo, R, PPS].

Indiquons que le théorème ci-dessous n'est pas impliqué par l'analogue du théorème de Fatou démontré par Roblin dans [R] (pour les densités conformes), et généralisé dans [PPS] aux potentiels quelconques. Ces théorèmes ont pour objet des masses de densités à l'infini, qui jouent le rôle de fonctions harmoniques, et sont invariantes par un même groupe d'isométries qui n'est pas, a priori, supposé cocompact.

A contrario, les fonctions que nous considérons ne sont supposées invariantes par aucun groupe d'isométrie de l'espace ambiant, mais l'espace de définition est supposé revêtir une variété compacte de courbure négative.

Soit donc B une variété Riemannienne close courbée négativement et de dimension $d \geq 2$: nous notons N son revêtement universel Riemannien. Choisissons un potentiel Hölder $F : T^1B \to \mathbb{R}$, que l'on relève en une fonction $\widetilde{F} : T^1N \to \mathbb{R}$.

Souvenons-nous que Ledrappier a construit une famille de mesures finies $(\nu_z^F)_{z\in N}$ sur la sphère à l'infini $N(\infty)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- les ν_z^F vérifient la formule d'équivariance $\gamma * \nu_z^F = \nu_{\gamma z}^F$ pour tous $z \in N$ et $\gamma \in \pi_1(B)$;
- les ν_z^F sont tous dans la même classe de mesure et satisfont la relation de cocycle suivante :

$$\frac{d\nu_{z_2}^F}{d\nu_{z_1}^F}(\xi) = k^F(z_1, z_2; \xi),$$

  pour tous $z_1, z_2 \in N$ et $\xi \in N(\infty)$.

Par le théorème 2.1.10, ces deux propriétés déterminent la famille de mesures à une constante multiplicative près. Nous pouvons en conséquence fixer un point $o \in N$, et demander que $\mathrm{mass}(\nu_o^F) = 1$. Nous avons vu précédemment que la fonction suivante est F-harmonique et passe au quotient par l'action de $\pi_1(B)$:

$$\widetilde{h}_0(z) = \mathrm{mass}(\nu_z^F).$$

Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal de cette section :

Theorème 6.2.1 (à la Fatou)**.** *Soit B une variété Riemannienne close et courbée négativement, et N son revêtement universel Riemannien. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder qui se relève en $\widetilde{F} : T^1N \to \mathbb{R}$. Soit enfin $h : N \to \mathbb{R}$ la fonction F-harmonique définie par la formule suivante :*

$$h(z) = \int_{N(\infty)} k^F(o, z; \xi)\, d\eta(\xi),$$

où η est une mesure finie sur $N(\infty)$, qui admet la décomposition de Lebesgue suivante par rapport à ν_o^F : $\eta = f\nu_o^F + \eta_s$, où f est une fonction ν_o^F-intégrable, et η_s est une mesure singulière par rapport à ν_o^F. Alors :

1. *pour ν_o^F-presque tout $\xi \in N(\infty)$, on a :*
$$\frac{h(z)}{\widetilde{h}_o(z)} \to f(\xi),$$
lorsque z converge non-tangentiellement vers ξ ;
2. *pour η_s-presque tout $\xi \in N(\infty)$, on a :*
$$h(z) \to \infty$$
lorsque z converge non-tangentiellement vers ξ.

2.2 – Unicité des fonctions F-harmoniques sur une variété compacte.

Une conséquence du théorème à la Fatou 6.2.1 est une preuve du fait que sur une variété Riemannienne close B courbée négativement, il n'existe qu'une seule fonction F-harmonique à multiplication par une constante positive près, et ce pour tout potentiel Hölder $F : T^1B \to \mathbb{R}$. Plus précisément, nous avons défini plus haut une fonction $\widetilde{h}_0$ sur le revêtement universel N qui est F-harmonique, normalisée par $\widetilde{h}_0(o) = 1$, et qui est invariante par l'action de $\pi_1(B)$: nous appelons h_0 la fonction induite par passage au quotient sur B.

Bien-sûr, nous avons donné une preuve nettement plus simple de ce fait qui est basée sur l'unicité des états de Gibbs, et la bijection entre mesures F-harmoniques et mesures de Gibbs associés au potentiel F, mais puisque c'est cette question d'unicité qui avait motivé l'énoncé et la preuve de notre théorème à la Fatou, nous avons pensé qu'il serait intéressant de reproduire le cheminement initial.

Theorème 6.2.2. *Soit B une variété Riemannienne close courbée négativement, et $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Alors, à multiplication près par une constante positive, h_0 est l'unique fonction F-harmonique sur B.*

Preuve. Il est équivalent d'avoir une fonction F-harmonique sur B ou une fonction F-harmonique sur N qui soit invariante par l'action de $\pi_1(B)$. Ainsi, nous allons prouver qu'à constante multiplicative près, $\widetilde{h}_0$ est l'unique fonction F-harmonique sur N qui soit invariante par l'action de $\pi_1(B)$.

Soit donc h une telle fonction. Il existe une mesure finie η sur $N(\infty)$ telle que h s'écrive sous la forme intégrale suivante :
$$h(z) = \int_{N(\infty)} k^F(o, z; \xi)\, d\eta(\xi),$$
pour tout $z \in N$. Écrivons la décomposition de Lebesgue de η par rapport à ν_o^F : $\eta = f\nu_o^F + \eta_s$ où $f \in L^1(N(\infty), \nu_o^F)$ et η_s est singulière par rapport à ν_o^F.

La première remarque est que la fonction h est continue et invariante par $\pi_1(B)$, qui est un sous groupe cocompact d'isométries de N. En conséquence, h est bornée, et la deuxième partie du théorème à la Fatou entraîne que la mesure η n'a pas de partie singulière par rapport à ν_o^F : nous pouvons écrire $\eta = f\nu_o^F$.

Une nouvelle utilisation de la compacité de B entraîne que toute géodésique est à distance bornée d'une ligne brisée reliant des points de l'orbite de o sous $\pi_1(B)$. En conséquence, tout point $\xi \in N(\infty)$ peut être obtenu comme limite non-tangentielle d'une suite $(\gamma_i o)_{i\in\mathbb{N}}$, $\gamma_i \in \pi_1(B)$. Soit $\xi \in N(\infty)$ et $(\gamma_i o)_{i\in\mathbb{N}}$ une telle orbite.

Par invariance de h et $\widetilde{h}_0$ sous l'action de $\pi_1(B)$, il vient que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $h(\gamma_i o) = h(o)$, et $\widetilde{h}_0(\gamma_i o) = \widetilde{h}_0(o) = 1$: en particulier, $h(o) = \lim_{i\to\infty} h(\gamma_i o)/\widetilde{h}_0(\gamma_i o)$. Ainsi, la première partie de notre théorème à la Fatou entraîne-t-elle que pour ν_o^F-presque tout $\xi \in N(\infty)$, $h(o) = f(\xi)$.

Finalement, l'on trouve que $\eta = h(o)\nu_o^F$. En se rappelant que $k^F(o,z;\xi) = d\nu_z^F/d\nu_o^F(\xi)$, il vient immédiatement que pour tout $z \in N$, $h(z) = h(o)\mathrm{mass}(\nu_z^F) = h(o)\widetilde{h}_0(z)$, concluant ainsi la preuve du théorème. □

3 | Preuve du théorème à la Fatou

3.1 – Ombres

La preuve du théorème à la Fatou ressemble fort, comme dans le cas classique (voir [Ru]) à une preuve du théorème de différentiation de Lebesgue. Ce dernier théorème dépend fortement de la forme des ouverts qu'on fait tendre vers un point : dans $\mathbb{R}^n$, ou dans une variété différentiable, il suffit de considérer des boules, qui vérifient la propriété de recouvrement de Vitali (voir toujours [Ru]). Notre sphère à l'infini ne possède a priori rien de plus qu'une structure Hölder naturelle. Les ombres, définies ci-dessous, fournissent un bon candidat pour une généralisation du théorème de Lebesgue. Elles ont été introduites par Sullivan dans [Su1] lors de son étude des densités conformes à pour les actions à l'infini de groupes kleinéens. La majeure partie de ce qui suit sur la géométrie des ombres vient du bel article de Roblin [R] (voir aussi le très complet [PPS]).

Définition des ombres. Lorsque $z_1, z_2 \in N$ et $R > 0$, nous appelons *ombre* vue de z_1 de la boule $B(z_2,R)$ l'ensemble noté $\mathcal{O}_R(z_1,z_2)$, et constitué des points $\xi \in N(\infty)$ qui sont les extrémités des rayons géodésiques issus de z_1 et passant par la boule ouverte $B(z_2,R)$.

Par définition de la topologie conique sur $N \cup N(\infty)$, ces ombres sont des ensembles ouverts de $N(\infty)$. De plus, comme le montre le lemme suivant, ces ombres engendrent la topologie naturelle de $N(\infty)$.

Lemme 6.3.1. *Supposons que $R > 0$ et $o \in N$ soient fixé. Soit $\xi \in N(\infty)$, et $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ξ dans la topologie conique. Alors la suite d'ombres $\mathcal{O}_R(o,z_i)$ convergent vers $\{\xi\}$.*

Preuve. Il s'agit de voir que lorsque z_i converge non-tangentiellement, le cône des rayons géodésiques issus de o qui passent à distance R de z_i a un angle solide tendant vers zéro. Cela prouvera que la suite d'ombres est une suite d'ouverts relativement compacts dont le diamètre tend vers 0 : la limite est un singleton. Puisque z_i converge vers ξ dans la topologie conique, ce singleton ne pourra qu'être $\{\xi\}$.

Pour voir que cet angle solide tend vers zéro, nous appliquons l'inégalité CAT$(-a^2)$: pour tout triangle Δ il existe un unique triangle comparaison $\overline{\Delta}$ dans N_{-a^2} ayant les côtés de même longueur et dont les angles sont supérieurs ou égaux.

Considérons un rayon géodésique issu de o qui soit tangent à la frontière de $B(z_i,R)$ en un point y_i, ainsi que le triangle rectangle, noté Δ_i, dont les sommets sont o, y_i, z_i. Notons $L_i = \mathrm{dist}(o,z_i)$, et $M_i = \mathrm{dist}(o,y_i)$. Par l'inégalité triangulaire, on a $M_i \geq L_i - R$: cette quantité est appelée à devenir grande à mesure que i croît. Nous cherchons à majorer l'angle $\theta_i = \widehat{y_i o z_i}$. Par la propriété des espaces CAT$(-a^2)$ ci-dessus, nous pouvons prendre un triangle $\overline{\Delta}_i$ de N_{-a^2} ayant des côtés de longueurs respectivement L_i, M_i et R, et dont l'angle opposé au côté de longueur R, que l'on note $\bar{\theta}_i$, est supérieur ou égal à θ_i. Une simple application de la loi des cosinus donne alors :

$$1 \geq \cos\theta_i \geq \cos\bar{\theta}_i = \tanh(aL_i)\tanh(aM_i) - \frac{\cosh(aR)}{\sinh(aL_i)\sinh(aM_i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, l'angle $\theta_i = \widehat{y_i o z_i}$ tend-il vers 0, et ce pour tout y_i au bord de notre cône. L'angle solide du cône tend donc vers zéro, ainsi que le diamètre de l'ombre correspondante. Cela nous permet de conclure la preuve du lemme. □

Nous pouvons aussi généraliser la notion d'ombre en définissant, pour $R > 0$, $z \in N$, et $\xi_0 \in N(\infty)$, l'ensemble noté $\mathcal{O}_R(\xi_0, z)$, et constitué des points $\xi \in N(\infty)$ tels que la géodésique (ξ_0, ξ) rencontre la boule $B(z, R)$ Le lemme suivant est un simple argument de convexité, mais nous sera utile par la suite.

Lemme 6.3.2. *Soit $R > 0$, $z \in N$, et $\xi_0 \in N(\infty)$. Considérons le cône $\mathscr{C}_R(\xi_0, z)$ défini comme l'union des géodésiques issues de ξ_0 qui rencontrent $B(o, R)$. Alors :*

1. *la boule fermée $\mathrm{Adh}\, B(o, R)$ sépare $\mathrm{Adh}\,\mathscr{C}_R(\xi_0, z)$ en deux composantes connexes, l'une d'elles contenant ξ_0 (Adh représente l'adhérence) ;*
2. *pour tout z_0 à l'intérieur de la composante connexe de $\mathrm{Adh}\,\mathscr{C}_R(\xi_0, z) \setminus \mathrm{Adh}\, B(z, R)$ qui contient ξ_0, on a $\mathcal{O}_R(\xi_0, z) \subset \mathcal{O}_R(z_0, z)$.*

Preuve. D'une part, le cône $\mathscr{C}_R(\xi_0, z)$ est connexe par arcs car il est union de géodésiques qui intersectent toutes la même boule $B(o, R)$, qui elle est connexe par arcs.

Toute géodésique issue de ξ_0 et incluse dans $\mathrm{Adh}\,\mathscr{C}_R(\xi_0, r)$ rencontre la boule fermée $\mathrm{Adh}\, B(z, R)$ en un segment géodésique (si elle vit à l'intérieur), ou en un point (si elle vit à la frontière). Dans les deux cas, le boule disconnecte la géodésique en deux composantes connexes : la composante "avant la boule", et la composante "après la boule". En considérants les unions des composantes "avant la boule" (resp. "après la boule"), nous obtenons un ensemble noté H_1 (resp. H_2).

La sphère $S(o, 2R)$ rencontre le cône en deux sections transverses au cônes σ_1 et σ_2 disjointes de $B(o, R)$ incluses la première dans H_1, la seconde dans H_2. Ces sections sont, comme le cône lui-même, connexes par arcs. Puisque toute géodésique incluse dans $\mathrm{Adh}\,\mathscr{C}_R(\xi_0, z)$ rencontre successivement les deux sections, qui sont connexes par arcs, nous en déduisons facilement que les deux composantes H_1 et H_2 sont connexes par arcs.

Le seconde partie de la preuve est un argument de convexité. Le cône fermé $\mathrm{Adh}\,\mathscr{C}_R(\xi_0, z)$ est un ensemble géodésiquement convexe : il contient tout segment géodésique reliant deux de ses points. Ainsi, si $z_0 \in \mathscr{C}_R(\xi_0, z)$ est dans la composante connexe "avant la boule", et $\xi \in \mathcal{O}_R(\xi_0, z)$, le rayon géodésique $[z_0, \xi)$ est inclus dans le cône. Puisque z_0 et ξ sont dans différentes composantes connexes de $\mathrm{Adh}\,\mathscr{C}_R(\xi_0, z) \setminus \mathrm{Adh}\, B(z_0, R)$, c'est que le rayon géodésique $[z_0, \xi)$ rencontre la boule $B(o, R)$. Autrement dit, $\xi \in \mathcal{O}_R(z_0, z)$: CQFD. □

Théorème à la Vitali. Nous trouvons dans l'article de Roblin [R] un théorème de recouvrement à la Vitali qui s'énonce comme suit. Nous n'en détaillons pas la preuve, qui reprend les arguments classiques du théorème de Vitali usuel (voir [Matt]).

Theorème 6.3.3. *Soit $o \in N$, $r > 0$ et $Z \subset N$ un ensemble discret. Alors il existe une partie $Z^* \subset Z$ telle que les ombres $\mathcal{O}_r(o, z)$, pour $z \in Z^*$ soient deux à deux disjointes, et :*

$$\bigcup_{z\in Z} \mathcal{O}_r(o, z) \subset \bigcup_{z\in Z^*} \mathcal{O}_{5r}(o, z).$$

Densité de Lebesgue. Le théorème de recouvrement de Vitali est l'ingrédient principal pour prouver le théorème de densité de Lebesgue sur $N(\infty)$. Le théorème suivant est l'énoncé dans notre cadre d'un théorème emprunté à Rudin (voir les théorèmes 7.14 et 7.15 de [Ru]). Il se prouve en suivant pas à pas son raisonnement, et en utilisant le théorème à la Vitali 6.3.3, ainsi que le caractère "quintuplant" de la mesure (cf lemme 6.3.7), que nous prouverons dans le paragaphe suivant.

Theorème 6.3.4. *Supposons qu'à chaque $\xi \in N(\infty)$ soit associée une suite d'ombres $\mathcal{O}_i(\xi) = \mathcal{O}_r(o, z_i)$, où z_i est une suite convergeant non-tangentiellement vers ξ, et r est un réel positif indépendant de ξ. Soit η une mesure de Borel sur $N(\infty)$. Soit $\eta = f\nu_o^F + \eta_s$ la décomposition de Lebesgue de η par rapport à ν_o^F : f est une fonction ν_o^F-intégrable sur $N(\infty)$, et η_s est singulière par rapport à ν_o^F.*

Alors, pour η_0-presque tout $\xi \in N(\infty)$, on a :

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\eta(\mathcal{O}_i(\xi))}{\nu_o^F(\mathcal{O}_i(\xi))} = f(\xi).$$

En particulier, lorsque η et ν_o^F sont singulières, on a pour ν_o^F-presque tout $\xi \in N(\infty)$:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\eta(\mathcal{O}_i(\xi))}{\nu_o^F(\mathcal{O}_i(\xi))} = 0.$$

Par contraste, lorsque η et ν_o^F sont singulières, on a pour η-presque tout $\xi \in N(\infty)$:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\eta(\mathcal{O}_i(\xi))}{\nu_o^F(\mathcal{O}_i(\xi))} = \infty.$$

3.2 – Lemme de l'ombre.

L'utilité du résultat suivant n'est plus à prouver. D'abord établi par Sullivan pour des densités conformes dans le cas des variétés hyperboliques [Su1], il a connu plusieurs généralisations par la suite : nous renvoyons aux références [L1, Mo, R, PPS]. Nous reproduisons la preuve dans le cas cocompact, qui sera suffisant pour notre propos. Avant toute chose, nous tenons à rappeler, pour la commodité du lecteur, la définition des noyaux k^F. Si $F : T^1B \to \mathbb{R}$ est un potentiel Hölder et si $\widetilde{F} : T^1\widetilde{N} \to \mathbb{R}$ est son relevé, nous avons défini pour tous $o, z \in N$ et $\xi \in N(\infty)$:

$$k^F(o, z; \xi) = \exp\left(\int_\xi^z \widetilde{F} - \int_\xi^o \widetilde{F}\right) \exp(-P(F)\beta_\xi(o, z)),$$

où l'on rappelle que $P(F)$ représente la pression de F le cocycle de Busemann β_ξ a été défini selon la convention suivante : pour n'importe quel chemin géodésique c avec $c(\infty) = \xi$:

$$\beta_\xi(o, z) = \lim_{T\to\infty} \operatorname{dist}(z, c(T)) - \operatorname{dist}(o, c(T)).$$

Theorème 6.3.5 (Lemme de l'ombre)**.** *Soit N le revêtement universel d'une variété Riemannienne close courbée négativement B. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Nous fixons un point $o \in N$. Alors il existe deux constantes positives C et R telles que pour tous $z \in N$ et $\xi \in \mathcal{O}_R(o, z)$, l'on ait :*

$$\frac{C^{-1}}{\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o, z))} \le k^F(o, z; \xi) \le \frac{C}{\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o, z))}.$$

Nous allons utiliser le théorème sous la forme énoncée, mais il est plus facile de prouver l'encadrement suivant :

$$C^{-1}k^F(z, o; \xi) \le \nu_o^F(\mathcal{O}_R(o, z)) \le C k^F(z, o; \xi).$$

Preuve de la majoration. La majoration est la plus facile à obtenir. Elle se prouve en remarquant que pour tous $R>0$ et $z\in N$:

$$\nu_o^F(\mathscr{O}_R(o,z)) \leq \int_{\mathscr{O}_R(o,z)} k^F(z,o;\xi)\, d\nu_z^F(\xi).$$

Il s'agit à présent d'utiliser un lemme géométrique emprunté à [PPS] (voir la proposition 3.5 dans cette référence), rappelé sans preuve :

Lemme 6.3.6. *Pour tout potentiel Hölder $F : T^1B \to \mathbb{R}$, tout $R>0$, il existe des constantes de Hölder uniformes, ne dépendant donc pas de $y,z\in N$, pour toutes les fonctions :*

$$\xi \in \mathscr{O}_R(y,z) \mapsto \log k^F(y,z;\xi).$$

En particulier, il existe une constante positive universelle C_0 (dépendant de R mais pas de z) telle que si $\xi\in\mathscr{O}_R(o,z)$, on a pour tout autre $\xi'\in\mathscr{O}_R(o,z)$:

$$k^F(z,o;\xi') \leq C_0 k^F(z,o;\xi).$$

En particulier, on trouve :

$$C_0^{-1} k^F(z,o;\xi)\nu_z^F(\mathscr{O}_R(o,z)) \leq \nu_o^F(\mathscr{O}_R(o,z)) \leq C_0 k^F(z,o;\xi)\nu_z^F(\mathscr{O}_R(o,z)). \tag{6.3.9}$$

Puisque pour tout $z\in N$, $\nu_z^F(\mathscr{O}_R(o,z)) \leq C_1$, où C_1 est une borne supérieure de $\mathrm{mass}(\nu_z^F) = \widetilde{h}_0(z)$. Ainsi, la majoration dans (6.3.9), nous permet e conclure la première partie de la preuve. Remarquons tout de même qu'à ce moment de la preuve, tout ce raisonnement marcherait pour n'importe quel R, avec une constante qui bien sûr en dépend. Ce n'est plus le cas de la minoration. □

Preuve de la minoration. Le même argument qui nous a servi à majorer $\nu_o^F(\mathscr{O}_R(o,z))$ nous montre que prouver que la minoration recherchée équivaut à trouver deux réels C' et R tels que $\nu_z^F(\mathscr{O}_R(o,z)) \geq C'$. En effet, ceci est dû à l'encadrement (6.3.9).

Nous raisonnons ici par l'absurde, en supposant qu'il y a une suite de réels $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini avec i ainsi qu'une suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de N tels que :

$$\lim_{i\to\infty} \nu_{z_i}^F(\mathscr{O}_{R_i}(o,z_i)) = 0.$$

La première remarque à faire est que dans ce cas, z_i ne reste pas dans un compact. En effet, si tel était le cas, nous aurions, puisque R_i tend vers l'infini, $\nu_{z_i}^F(\mathscr{O}_{R_i}(o,z_i)) = 1$ à partir d'un certain rang i_0, ce qui est exclu.

Ainsi, z_i sort de tout compact : nous pouvons, quitte à extraire, supposer que $\mathrm{dist}(o,z_i)\to\infty$ en croissant strictement. Puisque le groupe $\pi_1(B)$ est cocompact, on peut ramener z_i dans le domaine fondamental (compact) auquel appartient o, que l'on appellera K, par une *isométrie* $\gamma_i\in\pi_1(B)$. Dans ce cas, on a $\mathrm{dist}(\gamma_i o,K) \geq \mathrm{dist}(\gamma_i o,\gamma_i z_i) = \mathrm{dist}(o,z_i)\to\infty$. Puisque γ_i est une isométrie, on a $\nu_{z_i}^F(\mathscr{O}_{R_i}(o,z_i)) = \nu_{\gamma_i z_i}^F(\mathscr{O}_{R_i}(\gamma_i o,\gamma_i z_i))$.

Nous pouvons supposer, quitte à extraire, que $\gamma_i o$ converge dans la topologie conique vers un point $\xi_\infty\in N(\infty)$, et que $\gamma_i z_i$ converge vers un point $z_\infty\in K$: dans ce cas, $\nu_{\gamma_i z_i}^F$ converge vers $\nu_{z_\infty}^F$ dans la topologie faible-$*$ (elle est équivalente à cette mesure et la densité, continue, tend vers 1 identiquement).

Puisque $R_i\to\infty$, il vient que la suite d'ombres $\mathscr{O}_{R_i}(\gamma_i o,\gamma_i z_i)$ converge vers $N(\infty)\setminus\{\xi\}$, de sorte que l'on a $\nu_z^F({}^c\{\xi\}) = 0$: mais la classe déterminée par ν_z^F n'a pas d'atomes (le groupe n'est pas élémentaire), c'est une contradiction. Nous pouvons donc conclure la preuve du théorème. □

Remarque. Comme indiqué lors de la première partie de la preuve, une telle majoration est vraie pour tout $R' > 0$, il existe une constante $C(R') > 0$ telle que pour tout $z \in N$, on ait pour tout $\xi \in \mathscr{O}_{R'}(o,z)$:

$$k^F(o,z;\xi) \leq \frac{C(R')}{\nu_o^F(\mathscr{O}_{R'}(o,z))}.$$

On en déduit une propriété importante de la mesure ν_o^F : elle est *doublante* (on prouve plutôt qu'elle est quintuplante...) :

Lemme 6.3.7. *Il existe un réel positif C_5 tel que pour tout $z \in N$, on ait :*

$$\nu_o^F(\mathscr{O}_{5R}(o,z)) \leq C_5 \nu_o^F(\mathscr{O}_R(o,z)),$$

où R est le réel positif donné par le lemme de l'ombre.

Preuve. C'est une application immédiate du lemme de l'ombre (on utilise majoration et minoration). Soit $z \in N$. On a $\mathscr{O}_R(o,z) \subset \mathscr{O}_{5R}(o,z)$ donc, en vertu de la minoration donnée par le lemme de l'ombre, par la remarque ci-dessus, pour tout $\xi \in \mathscr{O}_R(o,z)$, on a :

$$\nu_o^F(\mathscr{O}_{5R}(o,z)) \leq C(5R)k(z,o;\xi) \leq C(5R)C(R)\nu_o^F(\mathscr{O}_R(o,z)).$$

On conclut en posant $C_5 = C(R)C(5R)$. □

3.3 – Réduction à l'étude de la fonction maximale

Dans toute la suite, nous fixons un point $o \in N$, ainsi que les réels $C, R > 0$ donnés par le lemme de l'ombre 6.3.5. La preuve suit la preuve usuelle du théorème de différentiation des mesures de Borel. On va d'abord prouver le théorème lorsque $h(z) = \int_{N(\infty)} k^F(o,z;\xi)d\eta(\xi)$, avec $\eta = f\nu_o^F$, où $f : N(\infty) \to \mathbb{R}$ est continue et positive ou nulle, en approchant les fonctions L^1 par des fonctions continues, et en utilisant les fonctions maximales à la Hardy-Littlewood (voir [AS] pour la stratégie initiale) pour traiter le cas où f est intégrable sur $N(\infty)$. Le cas où η est singulière sera une application plus ou moins directe du lemme de l'ombre (de la minoration pour être précis).

On rappelle que $\widetilde{h}_0$ est la fonction F-harmonique obtenue en considérant les masses des mesures finies ν_z^F.

Cas d'une mesure à densité continue. Nous traitons ici le cas des mesures $\eta = f\nu_o^F$, avec f continue positive ou nulle.

Proposition 6.3.8. *Soit $f : N(\infty) \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, et $h : z \in N \mapsto \int_{N(\infty)} k^F(o,z;\xi)f(\xi)d\nu_o^F(\xi)$, la fonction F-harmonique correspondante. Alors, pour tout $\xi \in N(\infty)$, on a :*

$$\lim_{z \to \xi} \frac{h(z)}{\widetilde{h}_0(z)} = f(\xi),$$

où la convergence est non-tangentielle.

Preuve. Nous allons dans un premier temps montrer que la convergence a lieu lorsque z tend vers ξ_0 tout en restant sur le rayon géodésique $[o,\xi_0)$, puis montrerons que l'on peut toujours se ramener à ce cas.

En guise de remarque préliminaire, mentionnons que puisque $k^F(o,z;\xi) = d\nu_z^F/d\nu_o^F(\xi)$, nous avons $h(z) = \int_{N(\infty)} f(\xi)d\nu_z^F(\xi)$ pour tout $z \in N$.

Supposons donc que $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers ξ_0 tout en restant sur le rayon géodésique $[o,\xi_0)$. Nous pouvons, quitte à extraire, supposer que la distance $\mathrm{dist}(o,z_i)$ tende vers l'infini tout en croissant strictement. Alors, $\mathcal{O}_i(\xi_0) = \mathcal{O}_R(o,z_i)$ est une suite strictement décroissante d'ouverts relativement compacts qui converge vers $\{\xi_0\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un i_0 tel que pour tout $i \geq i_0$, l'on ait $|f(\xi) - f(\xi_0)| < \varepsilon$ pour tout $\xi \in \mathcal{O}_i(\xi_0)$. Alors, pour tout $z \in [o,\xi)$, nous pouvons écrire :

$$\frac{h(z)}{\widetilde{h}_0(z)} - f(\xi_0) = \int_{^c\mathcal{O}_{i_0}(\xi_0)} (f(\xi) - f(\xi_0))\frac{d\nu_z^F(\xi)}{\mathrm{mass}(\nu_z^F)} + \int_{\mathcal{O}_{i_0}(\xi_0)} (f(\xi) - f(\xi_0))\frac{d\nu_z^F(\xi)}{\mathrm{mass}(\nu_z^F)}.$$

Si l'on applique cette formule à un z_i, avec $i \geq i_0$, alors on voit que la deuxième intégrale est contrôlée par ε.

Quant au premier terme, nous pouvons le majorer par $(\nu_{z_i}^F(^c\mathcal{O}_{i_0}(\xi_0))/\mathrm{mass}(\nu_{z_i}^F))2\,\mathrm{Sup}\, f$. Il s'agit donc, pour conclure, de montrer que $\lim \nu_{z_i}^F(^c\mathcal{O}_{i_0}(\xi_0)) = 0$.

Puisque $z_i \to \xi_0$ radialement, la suite d'ombres $\mathcal{O}_R(\xi_0, z_i)$ est une suite croissante d'ouverts qui converge vers $N(\infty) \setminus \{\xi\}$. En particulier, pour un certain $i_1 > i_0$, on a $^c\mathcal{O}_R(o,z_{i_0}) \subset \mathcal{O}_R(\xi_0, z_{i_1})$. Par le lemme 6.3.2, nous avons pour tout $i > i_1$, $\mathcal{O}_R(\xi_0, z_{i_1}) \subset \mathcal{O}_R(z_i, z_{i_1})$. Ainsi, on trouve que pour tout $i > i_1$, on a $\nu_{z_i}^F(^c\mathcal{O}_R(o,z_{i_0})) \leq \nu_{z_i}^F(\mathcal{O}_R(z_i, z_{i_1}))$.

A présent, nous pouvons envoyer, par une isométrie $\gamma_i \in \pi_1(B)$, z_i sur le domaine fondamental, compact, qui contient o, et que nous notons K. Lorsque i croît indéfiniment, $\gamma_i z_{i_1}$ est envoyé à l'infini, et l'ombre $\mathcal{O}_R(\gamma_i z_i, \gamma_i z_{i_1})$ a un diamètre qui tend vers zéro. On a donc :

$$\nu_{z_i}^F(^c\mathcal{O}_R(o,z_{i_0})) \leq \nu_{z_i}^F(\mathcal{O}_R(z_i, z_{i_1})) = \nu_{\gamma_i z_i}^F(\mathcal{O}_R(\gamma_i z_i, \gamma_i z_{i_1})) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En conséquence, il existe $i_2 > i_1 > i_0$ tels que pour tout $i > i_2$, $\nu_{z_i}^F(^c\mathcal{O}_R(o,z_{i_0})) \leq \varepsilon$.

Ainsi, lorsque $i > i_2$, on a :

$$\left|\frac{h(z_i)}{\widetilde{h}_0(z_i)} - f(\xi_0)\right| \leq 2\,\mathrm{Sup}\, f\varepsilon + \varepsilon = (2\,\mathrm{Sup}\, f + 1)\varepsilon.$$

Cela prouve bien que l'on a $\lim h(z)/h(z_i) = f(\xi_0)$.

Nous affirmons à présent que le cas général se traite ainsi. Supposons par exemple que $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers ξ_0 dans la topologie conique, tout en restant à distance $\leq r$ du rayon géodésique $[o,\xi_0)$. Il existe alors une suite $(z_i')_{i\in\mathbb{N}}$ de points appartenant à $[o,\xi)$, et telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on ait $\mathrm{dist}(z_i, z_i') \leq r$. Alors, $B(z_i,R) \subset B(z_i', R+r)$ et on a $\mathcal{O}_R(z_i,R) \subset \mathcal{O}_{R+r}(z_i', R+r)$. Il s'agit alors de répéter ce qui précède avec des ombres de taille $R+r$, et non de taille R. La preuve est alors finie. □

Fonction maximale. Pour une mesure de Borel finie sur $N(\infty)$, η, nous définissons la fonction maximale par rapport à ν_o^F par la formule suivante pour $\xi \in N(\infty)$:

$$M_\eta(\xi) = \underset{z\in c_{o,\xi}}{\mathrm{Sup}} \frac{\eta(\mathcal{O}_R(o,z))}{\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o,z))}.$$

Nous prouvons dans le lemme suivant ce fait utile que la fonction maximale est faiblement ν_o^F-intégrable :

Lemme 6.3.9. *Soit η une mesure de Borel finie sur $N(\infty)$, et C_5 la constante fournie par le lemme de quintuplement 6.3.7. Alors il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $\alpha > 0$, on ait :*

$$\nu_o^F[M_\eta > \alpha] \leq \frac{A}{\alpha}\mathrm{mass}(\eta).$$

Preuve. La preuve de ce fait utilise le caractère "quintuplant" de la mesure ν_o^F, ainsi que le théorème à la Vitali (voir les lemme 6.3.7 et théorème 6.3.3).

Pour $\alpha > 0$, nous introduisons l'ensemble Borélien $E_\alpha = \{\xi \in N(\alpha); M_\eta(\xi) > \alpha\}$. Ainsi, pour tout $\xi \in E_\alpha$, il existe $z_\xi \in [o,\xi)$ tel que :

$$\eta(\mathscr{O}_R(o,z_\xi)) > \alpha\nu_o^F(\mathscr{O}_R(o,z_\xi)).$$

En particulier, puisque $z_\xi \in [o,\xi)$, le Borélien E_α est recouvert par les ombres $\mathscr{O}_R(o,z_\xi)$. Nous pouvons extraire du recouvrement par les ombres $\mathscr{O}_R(o,z_\xi)$ un recouvrement $(\mathscr{O}_R(o,z))_{z\in Z}$ indexé par un ensemble discret Z. Par le théorème à la Vitali, il existe un sous-ensemble $Z^* \subset Z$ telles que les ombres $(\mathscr{O}_R(o,z))_{z\in Z^*}$ soient deux à deux disjointes, et telles que $E_\alpha \subset \bigcup_{z\in Z} \mathscr{O}_R(o,z) \subset \bigcup_{z\in Z^*} \mathscr{O}_{5R}(o,z)$.

En utilisant la propriété de quintuplement, et le fait que les ombres $\mathscr{O}_R(o,z)$, $z \in Z^*$ sont deux à deux distinctes, nous avons alors la chaîne d'inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{mass}(\eta) &\geq \sum_{z\in Z^*} \eta(\mathscr{O}_R(o,z))\\
&\geq \alpha \sum_{z\in Z^*} \nu_o^F(\mathscr{O}_R(o,z))\\
&\geq \frac{\alpha}{C_5} \sum_{z\in Z^*} \nu_o^F(\mathscr{O}_{5R}(o,z))\\
&\geq \frac{\alpha}{C_5} \nu_o^F\left(\bigcup_{z\in Z^*} \mathscr{O}_{5R}(o,z)\right)\\
&\geq \frac{\alpha}{C_5} \nu_o^F(E_\alpha).
\end{aligned}$$

On peut à présent conclure la preuve en multipliant cette inégalité par C_5/α. □

Proposition principale. La proposition suivante est l'ingrédient technique principal pour prouver le théorème 6.2.1. Nous définissons $\mathscr{V}^r(o,\xi)$ comme le r-voisinage du rayon géodésique $[o,\xi)$.

Proposition 6.3.10. *Soit η une mesure de Borel finie sur $N(\infty)$, et h la fonction F-harmonique correspondante.*

1. *Alors pour tout $r > 0$, il existe une constante $C_r > 0$, telle que pour tout $\xi \in N(\infty)$, et pour tout $z \in \mathscr{V}^r(o,\xi)$, on ait :*
$$h(z) \leq C_r M_\eta(\xi).$$
2. *Si $C > 1$ est la constante donnée dans le lemme de l'ombre, on a pour tout $z \in N$:*
$$h(z) \geq C^{-1}\frac{\eta(\mathscr{O}_R(o,z))}{\nu_o^F(\mathscr{O}_R(o,z))}$$
.

Avant de prouver cette proposition, voyons comment elle nous permet de prouver notre théorème à la Fatou.

Preuve de la première partie du théorème à la Fatou. Soit η une mesure de Borel finie sur $N(\infty)$ et h, la fonction F-harmonique correspondante : pour tout $z \in N$, $h(z) = \int_{N(\infty)} k^F(o,z;\xi)d\eta(\xi)$. Écrivons la décomposition de Lebesgue $\eta = f\nu_o^F + \eta_s$, où $f \in L^1(N(\infty), \nu_o^F)$, et où η_s est singulière par rapport à ν_o^F. Nous pouvons ainsi séparer l'intégrale deux morceaux et écrire $h = h_1 + h_2$ où, pour tout $z \in N$:

$$h_1(z) = \int_{N(\infty)} k^F(o,z;\xi) f(\xi) d\nu_o^F(\xi), \quad \text{et} \quad h_2(z) = \int_{N(\infty)} k^F(o,z;\xi) d\eta_s(\xi).$$

Pour prouver le lemme suivant, nous recopions la preuve du théorème 7.7 de [Ru].

Lemme 6.3.11. *Pour ν_o^F-presque tout $\xi \in N(\infty)$, le quotient $h_1(z)/\widetilde{h}_0(z)$ converge vers $f(\xi)$ lorsque z tend vers ξ non-tangentiellement.*

Preuve. Comme dans la preuve du théorème de densité de Lebesgue (cf [Ru]), nous allons utiliser des approximations de f par des applications continues. Pour alléger, nous noterons $||.||$ pour la norme usuelle de $L^1(N(\infty), \nu_o^F)$. Fixons $r > 0$, et considérons la fonction définie par :

$$T_f^r(\xi_0) = \overline{\lim_{z \to \xi_0}} \int_{N(\infty)} |f(\xi) - f(\xi_0)| k^F(o,z;\xi) d\nu_o^F(\xi),$$

où z converge vers ξ_0 tout en restant dans $\mathcal{V}^r(o,\xi_0)$. Notre but est de prouver que pour ν-presque tout ξ_0, $T_f^r(\xi_0) = 0$.

Soit $n \geq 1$ un entier. On peut trouver une fonction continue positive ou nulle $f_n : N(\infty) \to \mathbb{R}^+$ telle que $||f - f_n|| < 1/n$. Puisque f_n est continue, on a par le théorème 6.3.8 $T_{f_n}^r = 0$. Ainsi, si $\phi_n = f - f_n$:

$$T_f^r(\xi_0) \leq T_{\phi_n}^r(\xi_0).$$

En utilisant que $z \in \mathcal{V}^r(o,\xi)$, en appliquant la première partie de la proposition 6.3.10 à la mesure $|\phi_n|\nu_o^F$, et en remarquant que $\widetilde{h}_0$ est bornée sur N, on obtient la majoration suivante, valide quel que soit $\xi_0 \in N(\infty)$:

$$\begin{aligned}
\int_{N(\infty)} |\phi_n(\xi) - \phi_n(\xi_0)| k^F(o,z;\xi) d\nu_o^F(\xi) \quad &\leq \quad \int_{N(\infty)} |\phi_n(\xi)| k^F(o,z;\xi) d\nu(\xi) \\
&\quad + \int_{N(\infty)} |\phi_n(\xi_0)| k^F(o,z;\xi) d\nu(\xi) \\
&\leq \quad C_r M_{|\phi_n|\nu_o^F}(\xi_0) + |\phi_n(\xi_0)| \operatorname*{Sup}_{z \in N} \widetilde{h}_0(z).
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante C_r' telle que l'on ait pour tout $\xi_0 \in N(\infty)$:

$$T_f^r(\xi_0) \leq C_r' \left[M_{|\phi_n|\nu_o^F}(\xi_0) + |\phi_n(\xi_0)| \right].$$

En particulier, étant donné $\varepsilon > 0$:

$$\left\{ T_f^r > 2C_r'\varepsilon \right\} \subset \left\{ M_{|\phi_n|\nu_o^F} > \varepsilon \right\} \cup \{|\phi_n| > \varepsilon\}.$$

Une application de l'inégalité de Markov nous donne :

$$\nu_o^F[\phi_n > \varepsilon] \leq \frac{||\phi_n||}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon n}.$$

Une application du lemme 6.3.9 nous donne :

$$\nu_o^F \left[M_{|\phi_n|\nu_o^F} > \varepsilon \right] \leq \frac{A}{\varepsilon} ||\phi_n|| \leq \frac{A}{\varepsilon n}.$$

Nous pouvons choisir n arbitrairement grand. Nous trouvons donc, en faisant tendre n vers l'infini, que $\{T_f^r > 2C_r'\varepsilon\}$ est nul pour ν_o^F, et ce pour tout ε. Cela prouve bien que pour un ensemble de mesure pleine de ξ_0, $T_f^r(\xi_0) = 0$. En choisissant r arbitraire, cela prouve que l'on a un ensemble plein pour ν_o^F constitué de $\xi_0 \in N(\infty)$ pour lesquels $\lim_{z\to\xi_0} h(z) = f(\xi_0)$, la convergence étant non-tangentielle. □

Lemme 6.3.12. *Supposons que η soit singulière par rapport à ν_o^F, et soit h la fonction F-harmonique correspondante. Alors pour ν_o^F-presque tout $\xi_0 \in N(\infty)$, on a $\lim_{z\to\xi_0} h(z) = 0$, quand z converge vers ξ_0 non-tangentiellement.*

Preuve. Nous utilisons le théorème de différentiation des mesures (théorème 6.3.4). Puisque η est singulière par rapport à ν_o^F, on a pour ν_o^F-presque tout ξ_0,

$$\lim_{z\to\xi_0} \frac{\eta(\mathcal{O}_R(o,z))}{\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o,z))} = 0,$$

la convergence $z \to \xi_0$ étant non-tangentielle.

Fixons-nous ξ_0, et choisissons $r > 0$, ainsi que $\varepsilon > 0$ et $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ξ_0 tout en restant dans $\mathcal{V}^r(o,\xi_0)$. Nous demandons, sans restriction, que la suite des $\mathrm{dist}(o,z_i)$ soit strictement croissante. Nous déduisons de ce qui précède l'existence d'un indice i_0 tel que pour tout $z \in \mathcal{V}^r(o,\xi_0)$ plus loin de o que z_{i_0}, on ait $\eta(\mathcal{O}_R(o,z))/\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o,z)) \le \varepsilon$.

Nous pouvons alors décomposer la mesure $\eta = \eta_1 + \eta_2$ où $\eta_1 = \eta_{|^c\mathcal{O}_R(o,z_{i_0})}$ et $\eta_2 = \eta_{|\mathcal{O}_R(o,z_{i_0})}$, de sorte que pour tout $z \in N$, $h(z) = h_1(z) + h_2(z)$, où

$$h_j(z) = \int_{N(\infty)} k^F(o,z;\xi)\,d\eta_j(\xi), \quad j = 1,2.$$

Nous pouvons appliquer ici la première partie de la proposition 6.3.10 : on a pour tout $z \in \mathcal{V}^r(o,\xi_0)$ plus loin de o que z_{i_0} :

$$h_2(z) \le C_r M_{\eta_2}(\xi_0) \le C_r\varepsilon,$$

la dernière inégalité étant vraie parce que par le choix de i_0, on a pour tout $z \in \mathcal{V}^r(o,\xi_0)$ plus loin de o que z_{i_0}, $\eta(\mathcal{O}_R(o,z))/\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o,z)) \le \varepsilon$.

Reste à majorer la première intégrale. Comme dans la preuve de la proposition 6.3.8, nous pouvons trouver $i_1 > i_0$ tel que pour tout $i \ge i_1$, on ait $k^F(o,z_i;\xi_0) \le \varepsilon$: en particulier, pour tout $i > i_1$, $h_1(z_i) \le \varepsilon\,\mathrm{mass}(\eta)$.

Nous trouvons donc, pour tout $i \ge i_1$, $h(z_i) \le \varepsilon(1 + C_r)$. C'est bien que $\lim_{i\to\infty} h(z_i) = 0$ et ce pour toute suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et tout $r > 0$. Cela conclut la preuve du lemme. □

Preuve de la seconde partie du théorème à la Fatou. Nous supposons donnée une mesure de Borel finie η, qu'on suppose singulière par rapport à ν_o^F. Le théorème de différentiation des mesures 6.3.4 nous dit qu'alors pour η-presque tout ξ, on a :

$$\lim_{z\to\xi} \frac{\eta(\mathcal{O}_R(o,z))}{\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o,z))} = \infty$$

la convergence $z \to \xi$ étant non-tangentielle.

D'autre part, la seconde partie de la proposition 6.3.10 assure l'existence d'une constante C telle que pour tout z, $h(z) \ge C^{-1}\eta(\mathcal{O}_R(o,z))/\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o,z))$. Cela implique donc la seconde partie du théorème à la Fatou : pour η-presque tout ξ,

$$\lim_{z\to\xi} h(z) = \infty,$$

la convergence $z \to \xi$ étant non-tangentielle.

Finalement, le théorème à la Fatou est prouvé si l'on sait que la proposition est vraie. Le reste du travail sera donc de prouver cette proposition. $\square$

3.4 – Preuve de la proposition principale

Preuve de la seconde partie de la proposition. Le seconde partie de la proposition 6.3.10 est la plus facile à prouver : c'est une simple application du lemme de l'ombre. Il s'agit de prouver que pour toute mesure de Borel finie η sur $N(\infty)$, si h est la fonction F-harmonique correspondante, on a pour tout $z \in N$,

$$h(z) \geq C^{-1} \frac{\eta(\mathcal{O}_R(o,z))}{\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o,z))}.$$

Soit donc η une mesure de Borel finie sur $N(\infty)$, et h la fonction F-harmonique correspondante. Étant donné $z \in N$, on a $h(z) \geq \int_{\mathcal{O}_R(o,z)} k^F(o,z;\xi)d\eta(\xi)$.

Nous pouvons utiliser la minoration donnée par le lemme de l'ombre : nous avons une constante C indépendante de z telle que pour tout $\xi \in \mathcal{O}_R(o,z)$, l'on ait $k^F(o,z;\xi) \geq C^{-1}/\nu_o^F(\mathcal{O}_R(o,z))$.

Nous concluons la preuve en injectant cette minoration dans l'intégrale. $\square$

Idée pour la preuve de la première partie. La première étape est de se ramener au cas où $r = 0$, c'est-à-dire lorsque les convergences à l'infini sont mieux que non-tangentielles : elles sont radiales.

Nous montrerons ensuite que pour toute mesure de Borel finie η, si h est la fonction F-harmonique correspondante, nous avons, pour tout $\xi \in N(\infty)$, et tout z sur le rayon géodésique $[o,\xi)$, pour une certaine constante $C_0 > 0$:

$$h(z) \leq C_0 M_\eta(\xi).$$

Prenons-donc $\xi \in N(\infty)$, ainsi que z (suffisamment loin) sur le rayon géodédique $[o,\xi)$. Nous allons subdiviser le segment géodésique $[o,z]$ en points $z_0, \ldots, z_{k(z)}$, tels que $o, z_{k(z)}, \ldots, z_1, z_0 = z$ soient alignés dans cet ordre et que l'on ait $\mathrm{dist}(z_i, z_{i-1}) = R/2$. Cette subdivision a été choisie de sorte que l'on ait pour tout $i \geq 1$,

$$\mathcal{O}_{R/2}(o,z_i) \subset \mathcal{O}_R(o,z_{i-1}) \subset \mathcal{O}_R(o,z_i).$$

Notons de plus qu'on a alors $\mathrm{dist}(o, z_{k(z)}) \leq R/2$, de sorte que $\mathcal{O}_R(o, z_{k(z)}) = N(\infty)$. Cette condition a des conséquences géométriques qu'on analysera plus tard. Si l'on note $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_R(o,z_i)$, on pourra découper l'intégrale de la façon suivante :

$$h(z) = \sum_{i=1}^{k(z)} \int_{\mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}} k^F(o,z;\xi)d\eta(\xi) + \int_{\mathcal{O}_0} k^F(o,z;\xi)d\eta(\xi).$$

Nous traiterons la dernière intégrale grâce au lemme de l'ombre : il vient immédiatement, puisque pour tout $\xi \in \mathcal{O}_R(o,z)$, $k^F(o,z;\xi) \leq C/\nu_o^F(\mathcal{O}_0)$. En injectant cette majoration dans l'intégrale, nous trouvons que la dernière intégrale est inférieure à $C\eta(\mathcal{O}_0)/\nu_o^F(\mathcal{O}_0)$, qui est lui-même inférieur à $CM_\eta(\xi)$.

Quant à la somme, nous la traiterons de la façon suivante. Il y a la relation de cocycle :

$$k^F(o,z;\xi) = k^F(o,z_i;\xi)k^F(z_i,z;\xi).$$

Nous pouvons appliquer ici encore le lemme de l'ombre pour dire que pour tout $\xi \in \mathcal{O}_i$, $k^F(o,z_i;\xi) \leq C/\nu_o^F(\mathcal{O}_i)$. Nous pouvons aussi effectuer la majoration brutale suivante : pour tout $\xi \in \mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}$,

$$k^F(z_i,z;\xi) \leq \operatorname*{Sup}_{\xi \in \mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}} k^F(z_i,z;\xi) :$$

notons k_i cette borne supérieure. En injectant tout cela dans l'intégrale, nous trouverons alors :

$$\sum_{i=1}^{k(z)} \int_{\mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}} k^F(o,z;\xi)d\eta(\xi) \le C \sum_{i=1}^{k(z)} k_i \frac{\eta(\mathcal{O}_i)}{\nu_F(\mathcal{O}_i)} \le CM_\eta(\xi) \sum_{i=1}^{k(z)} k_i.$$

A présent, le cœur de la preuve consiste à évaluer la somme $\sum k_i$. Pour ce faire, nous devrons faire appel à deux lemmes géométriques, utilisant le fait crucial que lorsque $\xi \in \mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}$, on a en particulier $\xi \in \mathcal{O}_R(o,z_i) \setminus \mathcal{O}_{R/2}(o,z_i)$, ainsi que le théorème ergodique de Birkhoff, pour conclure qu k_i est dominé par le terme général d'une série géométrique. Ceci concluera donc la preuve.

Nous allons procéder de la façon suivante. Dans un premier temps, nous nous ramènerons au cas de la convergence radiale. Puis nous donnerons nos deux lemmes géométriques, qui sont de simples conséquences de théorèmes de comparaison. Ensuite, nous prouverons le théorème dans le cas où $F = 0$: la dernière étape (recours au théorème de Birkhoff) sera alors inutile, et l'application des lemmes géométriques n'en sera que plus transparente.

Se ramener au cas de la convergence radiale. Nous utiliserons le lemme suivant pour nous ramener au cas $r = 0$

Lemme 6.3.13. *Soit $r > 0$. Il existe un réel $L_r > 0$ tel que pour tout couple $(z,z') \in N \times N$ distants d'au plus r, on ait, pour tout $\xi \in N(\infty)$:*

$$L_r^{-1} \le k^F(z',z;\xi) \le L_r.$$

Preuve. Considérons un réel $r > 0$, ainsi que deux points $z, z' \in N$ distants d'au plus r. Soit $\xi \in N(\infty)$. Il suffit de prouver la majoration, puisque l'on a $k^F(z,z';\xi) = (k^F(z',z;\xi))^{-1}$.

Nous pouvons sans restriction supposer que $\beta_\xi(z,z')$ positif, si bien qu'il existe $z'' \in [z;\xi)$ appartenant à l'horosphère centrée en ξ et passant par z'. Nous pouvons alors écrire :

$$k^F(z',z;\xi) = \exp\left[\int_\xi^{z''} \widetilde{F} - \int_\xi^{z'} \widetilde{F}\right] \exp\left[\int_{z''}^{z} (\widetilde{F} - P(F))\right].$$

Nous avons $\beta_\xi(z',z) \le \mathrm{dist}(z',z) \le r$, ainsi par l'inégalité triangulaire, $\mathrm{dist}(z',z'') \le \mathrm{dist}(z',z) + \mathrm{dist}(z,z'') \le 2r$. En comparant la distance géodésique et horocyclique (voir le théorème de Heintze et Im Hof 3.4.8), nous voyons qu'alors, $\mathrm{dist}_H(z,z'') \le 2/b \sinh(2br)$ (ici dist_H désigne la distance horosphérique).

En utilisant le caractère Hölder de F, ainsi que la contraction exponentielle de la distance horosphérique le long des rayons géodésiques $[z',\xi)$ et $[z'',\xi)$, nous pouvons majorer le premier facteur par un réel positif ne dépendant que de r et de F.

En utilisant le fait que $F - P(F)$ est borné et que $\mathrm{dist}(z'',z) \le r$, il est possible de majorer le second facteur par un terme ne dépendant que de r et de F. Nous pouvons alors conclure la preuve du lemme. □

Nous déduisons de ce lemme que pour toute mesure de Borel finie η sur $N(\infty)$, si h est la fonction correspondante, nous avons $h(z)/h(z') \le L_r$ dès que z etz' sont distants d'au plus r. Ainsi, s'il est vrai que pour tout $\xi \in N(\infty)$, et $z \in [o,\xi)$, on ait $h(z) \le C_0 M_\eta(\xi)$, alors pour tout $z' \in \mathcal{V}^r(o,\xi)$, il existe $z \in [o,\xi)$ tel que $\mathrm{dist}(z,z') \le r$, et $h(z') \le L_r h(z) \le L_r C_0 M_\eta(\xi)$.

Ainsi, pour conclure la preuve de la proposition, il nous suffit de la prouver dans le cas de la convergence radiale.

Deux lemmes géométriques. Les lemmes suivants sont d'immédiates conséquences du théorème de comparaison de Topogonov (voir [CE]), et des inégalités CAT$(-a^2)$ (voir [BH]) qui permettent de comparer triangles de N avec ceux de N_{-b^2}, et de N_{-a^2}. Ils sont néanmoins des ingrédients importants de la preuve.

Lemme 6.3.14. *Il existe un réel positif θ_0 tel que pour tout $z \in N$, et tout $\xi \in {}^c\mathcal{O}_{R/2}(o,z)$, on ait :*

$$\widehat{\xi o \xi_0} \geq \theta_0,$$

où ξ_0 est l'extrémité du rayon géodésique issu de o et passant par z.

Preuve. Nous allons nous restreindre étape par étape à un cadre plus facile. Soit ξ_1 l'autre extrémité de la géodésique passant par o et z, de sorte que ξ_1, o, z, ξ_0 soient alignés dans cet ordre sur la géodésique (ξ_1,ξ_0). Nous avions prouvé par un argument de convexité (voir le lemme 6.3.2) que $\mathcal{O}_{R/2}(\xi_1,z) \subset \mathcal{O}_{R/2}(o,z)$: ainsi, il suffit de minorer l'angle extérieur en z du triangle géodésique dont les sommets sont ξ_1, z, et ξ, où $\xi \in {}^c\mathcal{O}_{R/2}(\xi_1,z)$.

Il est immédiat qu'il suffit de minorer cet angle lorsque la géodésique (ξ_1,ξ) est tangente à la sphère $S(o,R/2)$, c'est-à-dire lorsque la hauteur du triangle est $R/2$. Considérons un tel triangle et appelons θ l'angle extérieur en z.

Le théorème de Topogonov entraîne que si l'on considère le triangle, noté $\Delta_{R/2}$, (unique à isométrie près en courbure constante) de N_{-b^2} avec deux points à l'infini, un point, noté $\overline{z}$, dans N_{-b^2}, et une hauteur de $R/2$, alors l'angle extérieur à ce triangle en $\overline{z}$ est $\leq \theta$.

Enfin, en appliquant le théorème de Gauss-Bonnet, nous trouvons que l'angle extérieur à $\Delta_{R/2}$ en $\overline{z}$ de N_{-b^2} est égal à $b^2\mathrm{Aire}(\Delta_{R/2})$.

Ainsi, nous pouvons conclure : *une borne inférieure universelle de l'angle extérieur recherché est donnée par b^2 que multiplie l'aire du triangle dans N_{-b^2} ayant deux points à l'infini et une hauteur de $R/2$.* □

Avant d'énoncer le prochain lemme, et afin d'en faciliter la lecture, nous rappelons notre convention pour le cocycle de Busemann. Étant donnés deux points $z_1, z_2 \in N$ et un point ξ, nous posons :

$$\beta_\xi(z_1,z_2) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{dist}(z_2,c(T)) - \mathrm{dist}(z_1,c(T)),$$

où c est n'importe quel rayon géodésique asymptotique à ξ.

Lemme 6.3.15. *Il existe un réel $K>0$ tel que quels que soient $z_1,z_2 \in N$ tels que o,z_1,z_2 soient alignés dans cet ordre, et quel que soit $\xi \in {}^c\mathcal{O}_{R/2}(o,z_1)$, on ait :*

$$\beta_\xi(z_1,z_2) \geq \mathrm{dist}(z_1,z_2) - K.$$

Preuve. Ici, l'ingrédient principal est donné par une inégalité CAT$(-a^2)$, ainsi que par de la géométrie élémentaire en courbure constante (la loi des cosinus).

Soit z_1, z_2 et ξ donnés comme dans l'énoncé. Le lemme 6.3.14 nous assure que, puisque $\xi \in {}^c\mathcal{O}_{R/2}(o,z_1)$, et puisque o,z_1,z_2 sont alignés dans cet ordre, si θ représente $\widehat{\xi z_1 z_2}$, on a $\theta \geq \theta_0$.

Nous paramétrons le rayon géodésique $[z_1,\xi)$ de telle sorte que $c(T)$ représente le point de ce rayon situé à distance T de z_1. Pour simplifier la lecture du calcul, nous noterons $D = \mathrm{dist}(z_1,z_2)$, ainsi que $L(T) = \mathrm{dist}(z_2,c(T))$. Remarquons qu'alors, par définition, $\beta_\xi(z_1,z_2) = \lim_{T\to\infty} L(T) - T$.

Intéressons-nous donc au triangle dont les sommets sont z_1, z_2, et $c(T)$. Une inégalité CAT$(-a^2)$ nous dit qu'il existe un triangle dans N_{-a^2}, dont les sommets sont notés $\overline{z}_1, \overline{z}_2$ et $\overline{c}(T)$ de telle sorte que :

– $\operatorname{dist}(\overline{z}_1, \overline{c}(T)) = T$;
– $\operatorname{dist}(\overline{z}_1, \overline{z}_2) = D$;
– $\widehat{\overline{c}(T)\overline{z}_1\overline{z}_2} = \theta$;
– $\overline{L}(T) = \operatorname{dist}(\overline{c}(T), \overline{z}_2) \leq L(T)$.

Il ne nous reste plus qu'à utiliser la loi des cosinus dans N_{-a^2}, c'est-à-dire que l'on a :

$$\cosh(a\overline{L}(T)) = \cosh(aD)\cosh(aT) - \cos\theta \sinh(aD)\sinh(aT).$$

En utilisant que $\theta_0 \leq \theta$, que $\overline{L}(T) \leq L(T)$, en divisant par $\cosh(aT)$, et en factorisant par $\cosh(aD)$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\cosh(aL(T))}{\cosh(aT)} &\geq \cosh(aD)(1 - \cos\theta_0 \tanh(aD)\tanh(aT)) \\ &\geq \exp(aD)\frac{1-\cos\theta_0}{2}, \end{aligned}$$

pour la dernière inégalité, nous utilisons les faits que $\tanh x \leq 1$, et $\cosh(x) \geq e^x/2$ pour tout $x > 0$.

Lorsque T tend vers l'infini, cette inégalité devient $\exp(a\beta_\xi(z_1, z_2)) \geq \exp(a \operatorname{dist}(z_1, z_2))(1-\cos\theta_0)/2$.

La quantité $(1-\cos\theta_0)/2$ est < 1, donc en passant au logarithme, et en divisant par a, on obtient exactement la conclusion du lemme avec $-K = 1/a \log[(1-\cos\theta_0)/2]$. □

Cas du potentiel nul. Le noyau associé au potentiel nul est défini par :

$$k^0(z_1, z_2; \xi) = \exp(-h\beta_\xi(z_1, z_2)),$$

où $z_1, z_2 \in N$, $\xi \in N(\infty)$, et h est l'entropie topologique du flot géodésique g_t sur T^1B.

Proposition 6.3.16. *Soit η une mesure de Borel finie, et h la fonction 0-harmonique correspondante. Alors il existe une constante $C_0 > 0$, telle que pour tout $\xi_0 \in N(\infty)$ et tout $z \in [o, \xi)$, on ait :*

$$h(z) \leq C_0 M_\eta(\xi).$$

Ici $M_\eta(\xi)$ est la fonction maximale définie par rapport à la mesure de Patterson-Sullivan ν_o^0, c'est-à-dire la mesure à l'infini correspondant à la mesure d'entropie maximale.

Comme indiqué précédemment l'idée consiste, lorsque $z \in [o, \xi)$, à subdiviser le segment $[o, z]$.

Lemme 6.3.17. *Soit $\xi \in N(\infty)$, et $z \in [o, \xi)$. Considérons une subdivision $o, z_{k(z)}, \ldots, z_1, z_0 = z$ de points alignés dans cet ordre de $[o, z]$, tels que pour tout $i \geq 1$, l'on ait $\operatorname{dist}(z_i, z_{i-1}) = R/2$. Alors pour tout $i \geq 1$, on a :*

$$\mathcal{O}_{R/2}(o, z_i) \subset \mathcal{O}_R(o, z_{i-1}) \subset \mathcal{O}_R(o, z_i).$$

Preuve. La preuve de ce lemme est immédiate : puisque pour tout $i \geq 1$, o, z_i, z_{i-1} sont alignés dans cet ordre, et puisqu'on a $\operatorname{dist}(z_i, z_{i-1}) = R/2$, de sorte que $B(z_i, R/2) \subset B(z_{i-1}, R)$. □

Nous désignerons dans la suite par $\mathcal{O}_i$ l'ombre $\mathcal{O}_R(o, z_i)$.

Soit à présent η une mesure de Borel finie sur $N(\infty)$, et h la fonction 0-harmonique correspondante, que l'on peut écrire :

$$h(z) = \int_{N(\infty)} e^{-h\beta_\xi(o,z)} d\eta(\xi).$$

Comme nous l'avions indiqué lorsque nous avons donné l'idée de la preuve, nous allons décomposer h en une somme d'intégrales :

$$h(z) = \sum_{i=1}^{k(z)} \int_{\mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}} e^{-h\beta_\xi(o,z)} d\eta(\xi) + \int_{\mathcal{O}_0} e^{-h\beta_\xi(o,z)} d\eta(\xi). \tag{6.3.10}$$

Nous noterons, par commodité, I_i l'intégrale du noyau sur $\mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}$.

Lemme 6.3.18. *Si C est la borne donnée par le lemme de l'ombre, la dernière intégrale de la décomposition (6.3.10) est majorée par $CM_\eta(\xi_0)$, et ce pour tous $\xi_0 \in N(\infty)$ et $z \in [o, \xi_0)$.*

Preuve. Nous avions déjà donné l'argument précédemment : le lemme de l'ombre 6.3.5 appliqué au potentiel 0 nous assure que pour tout $z \in N$ et tout $\xi \in \mathcal{O}_R(o,z)$, on a $e^{-h\beta_\xi(o,z)} \leq C/\nu_o^0(\mathcal{O}_R(o,z))$. Nous obtenons la majoration en injectant cette inégalité dans l'intégrale et en remarquant que par définition, $\eta(\mathcal{O}_R(o,z))/\nu_o^0(\mathcal{O}_R(o,z)) \leq M_\eta(\xi_0)$, où ξ_0 est l'extrémité du rayon géodésique issu de o et passant par z. □

Lemme 6.3.19. *Soit $\xi_0 \in N(\infty)$, et $z \in [o, \xi_0)$. Choisissons un indice $i \in \{1, 2, ..., k(z)\}$. Appelons k_i la borne supérieure de $e^{-h\beta_\xi(z_i,z)}$ prise sur tous les $\xi \in \mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}$. Alors, si C est la constante donnée par le lemme de l'ombre, on a :*

$$I_i \leq Ck_i M_\eta(\xi_0).$$

Preuve. Comme nous l'avions indiqué lorsque nous avons donné l'idée de preuve, nous commençons par écrire la relation de cocycle $e^{-h\beta_\xi(o,z)} = e^{-h\beta_\xi(o,z_i)} e^{-h\beta_\xi(z_i,z)}$.

Lorsque $\xi \in \mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}$, nous effectuons d'une part la majoration brutale $e^{-h\beta_\xi(z_i,z)} \leq k_i$, puis d'autre part, la majoration donnée par le lemme de l'ombre : $e^{-h\beta_\xi(o,z_i)} \leq C/\nu_o^0(\mathcal{O}_i)$.

En injectant ces majorations dans l'intégrale, et en remarquant que par définition, $\eta(\mathcal{O}_i)/\nu_o^0(\mathcal{O}_i) \leq M_\eta(\xi_0)$, nous arrivons à la majoration souhaitée. □

Lemme 6.3.20. *Soit $\xi_0 \in N(\infty)$, et $z \in [o, \xi_0)$. Choisissons un indice $i \in \{1, 2, ..., k(z)\}$. Alors nous avons :*

$$k_i \leq e^{Kh} e^{-hi\frac{R}{2}},$$

où K est la constante donnée par le lemme géométrique 6.3.15.

Preuve. Nous avons, par le lemme 6.3.17, $\mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1} \subset \mathcal{O}_R(o,z_i) \setminus \mathcal{O}_{R/2}(o,z_i)$. On en déduit par le lemme géométrique 6.3.15, que pour tout $\mathcal{O}_i \setminus \mathcal{O}_{i-1}$, on a $\beta_\xi(z_i,z) \geq \mathrm{dist}(z_i,z) - K$.

En multipliant par $-h$, puis en passant à l'exponentielle, nous trouvons le résultat souhaité : il suffit de remarquer que par définition, $\mathrm{dist}(z_i,z) = iR/2$. □

Fin de la preuve de la proposition 6.3.16. Soit $\xi_0 \in N(\infty)$, et $z \in [o, \xi_0)$. Soit η une mesure de Borel finie sur $N(\infty)$, et h la fonction 0-harmonique correspondante. Nous avons décomposé h en somme d'intégrales : nous avons $h(z) = \sum_i I_i + \int_{\mathcal{O}_R(o,z)} e^{-h\beta_\xi(o,z)} d\eta(\xi)$.

Par le lemme 6.3.18, la dernière intégrale est majorée par $CM_\eta(\xi_0)$.

Par les lemmes 6.3.19 et 6.3.20, nous avons la majoration suivante pour tout $i \in \{1, ..., k(z)\}$:

$$I_i \leq e^{Kh} e^{-hiR/2} M_\eta(\xi_0).$$

Nous reconnaissons le terme général d'une série géométrique. Ainsi, nous pouvons conclure à l'existence d'une constante C_0, qui ne dépend pas ni z ni de ξ_0, telle que l'on ait :

$$h(z) \leq C_0 M_\eta(\xi_0).$$

La preuve de la proposition est donc terminée. □

Le cas général. Nous traitons à présent le cas où $F : T^1B \to \mathbb{R}$ est un potentiel Hölder quelconque. Nous voulons prouver qu'il existe une constante positive C_0, telle que pour toute mesure de Borel finie η sur $N(\infty)$, et pour tout $\xi_0 \in N(\infty)$, $z \in [o, \xi_0)$, nous ayons, si h est la fonction F-harmonique correspondant à η :

$$h(z) \leq C_0 M_\eta(\xi_0).$$

Dans ce cas aussi, il est possible, étant donné $\xi_0 \in N(\infty)$, et $z \in [o, \xi_0)$, de subdiviser le segment $[o, z]$ avec $o, z_{k(z)}, \ldots, z_1, z_0 = z$, vérifiant les propriétés ayant été énoncées plus tôt, et de décomposer une fonction F-harmonique h de la même manière :

$$h(z) = \sum_{i=1}^{k(z)} \int_{\mathscr{O}_i \setminus \mathscr{O}_{i-1}} k^F(o, z; \xi) d\eta(\xi) + \int_{\mathscr{O}_0} k^F(o, z; \xi) d\eta(\xi). \tag{6.3.11}$$

Dans ce cas, les lemmes 6.3.17, 6.3.18, 6.3.19 s'énoncent et se démontrent de façon identique en remplaçant le potentiel nul par F. La différence vient de ce que la preuve du lemme 6.3.20 ne suit pas directement du lemme géométrique 6.3.15, mais nécessite de la théorie ergodique. Avant d'énoncer les lemmes nécessaires, nous rappelons pour la commodité du lecteur, la définition du noyau k^F :

$$k^F(z_1, z_2; \xi) = \exp\left[\int_\xi^{z_2} \widetilde{F} - \int_\xi^{z_2} \widetilde{F}\right] \exp(-P(F)\beta_\xi(z_1, z_2)).$$

Notre but ici est de montrer que si $i \in \{1, \ldots, k(z)\}$, et si k_i désigne la borne supérieure de $k^F(z_i, z; \xi)$ pour $\xi \in \mathscr{O}_i \setminus \mathscr{O}_{i-1}$, alors k_i est contrôlé par le terme général d'une série géométrique. Nous pouvons énoncer notre premier lemme (c'est le lemme principal) :

Lemme 6.3.21. *Il existe une constante C_1 indépendante de z pour laquelle on a :*

$$k^F(z_i, z; \xi) \leq C_1 \exp\left[\int_{z_i}^{z} (\widetilde{F} - P(F))\right],$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, k(z)\}$, et $\xi \in \mathscr{O}_i \setminus \mathscr{O}_{i-1}$.

Preuve. Soit $z \in N$, $i \in \{1, \ldots, k(z)\}$, et $\xi \in \mathscr{O}_i \setminus \mathscr{O}_{i-1}$. Rappelons que le principal intérêt de prendre un tel ξ est, par le premier lemme géométrique 6.3.14, que $\widehat{\xi z_i z}$ est minoré par un angle θ_0 qui est universel (nous en avons donné une interprétation dans la preuve du lemme en question).

Comme dans la preuve du lemme 6.3.20, nous déduisons du lemme géométrique 6.3.15 que pour tout $\xi \in \mathscr{O}_i \setminus \mathscr{O}_{i-1}$, nous avons $\beta_\xi(z_i, z) \geq \mathrm{dist}(z_i, z) - K$. Ainsi, nous pouvons supposer $\beta_\xi(z_1, z_2) > 0$, car sinon, on a $\mathrm{dist}(z_i, z) \leq K$: le cocycle de Busemann est négatif sur une partie bornée seulement de $[z_i, \xi)$.

Nous supposons donc dans la suite que $\beta_\xi(z_i, z) > 0$. Soit z' le point appartenant à l'intersection de la géodésique issue de ξ et passant par z, avec l'horosphère $H_\xi(z_i)$. Puisque par hypothèse $\beta_\xi(z, z_i) > 0$, les points z, z' et ξ sont alignés dans cet ordre.

Nous affirmons que la distance entre z' et z_i est uniformément bornée. Cela résulte en effet de l'inégalité triangulaire et du fait que $\mathrm{dist}(z, z') = \beta_\xi(z_i, z) \geq \mathrm{dist}(z_i, z) - K$, de sorte que $\mathrm{dist}(z_i, z') \geq \mathrm{dist}(z_i, z) - \mathrm{dist}(z, z') \leq K$.

La distance horosphérique entre z' est z_i est également uniformément bornée par $K' = \frac{2}{b}\sinh(bK)$ (voir le théorème de Heintze et Im-Hof 3.4.8).

À présent, nous pouvons écrire le noyau sous la forme suivante :

$$k^F(z_i, z; \xi) \leq \exp\left[\int_\xi^{z'} \widetilde{F} - \int_\xi^{z_i} \widetilde{F}\right] \exp\left[\int_{z'}^{z} (\widetilde{F} - P(F))\right].$$

Le facteur de gauche se majore exactement comme lors de la preuve du lemme 6.3.13.

Reste à traiter le second facteur. Ainsi qu'on l'a remarqué précédemment, le segment géodésique $[z_i, z]$ K-piste $[z', z]$, et K est une constante uniforme. Donc, puisque la fonction $\widetilde{F}$ est Hölder sur T^1B, nous en déduisons que le rapport entre $\exp[\int_{z'}^{z}(\widetilde{F} - P(F))]$ et $\exp[\int_{z_i}^{z}(\widetilde{F} - P(F))]$ est borné.

La preuve du lemme est alors terminée. □

Nous rappelons que l'état de Gibbs du flot géodésique g_t associé à F a une entropie positive, que nous notons h_{μ_F}. Rappelons enfin la caractérisation variationnelle de l'état de Gibbs μ_F : nous avons :

$$P(F) = h_{\mu_F} + \int F d\mu_F. \tag{6.3.12}$$

Lemme 6.3.22. *Il existe une constante $C_2 > 1$ tels que pour tout $\xi \in N(\infty)$, et tout couple $z_1, z_2 \in N$ tel que z_1, z_2 et ξ soient alignés dans cet ordre, on ait :*

$$\exp\left[\int_{z_1}^{z_2}(\widetilde{F} - P(F))\right] \leq C_2 \exp\left[-\frac{h_{\mu_F}}{2}\operatorname{dist}(z_1, z_2)\right],$$

Preuve. Utilisons le théorème de Birkhoff. Pour μ_F-presque tout $v \in T^1B$, on a :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F\circ g_t(v)dt = \int F d\mu_F.$$

Par la caractérisation variationnelle de l'état d'équilibre, il vient que pour μ_F-presque tout v,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (F\circ g_t(v) - P(F))dt = \int F d\mu_F - P(F) = -h_{\mu_F}.$$

Ainsi, en prenant l'exponentielle, nous trouvons que le rapport entre les expressions $\exp[\int_0^T(F\circ g_t(v))dt]$ et $e^{-Th_{\mu_F}}$ est sous-exponentiel en T.

Les relevés au revêtement universel des géodésiques typiques sont exactement celles dont les deux extrémités sont typiques. Ainsi, il existe un Borélien $\mathscr{X} \subset N(\infty)$ plein pour ν_o^F tel que pour toute géodésique dont les extrémités sont dans $\mathscr{X}$, et pour tout couple de points (z_1, z_2) appartenant à cette géodésique, le rapport entre $\exp[\int_{z_1}^{z_2}(\widetilde{F} - P(F)]$ et $e^{-\operatorname{dist}(z_1,z_2)h_{\mu_F}}$ est une fonction sous-exponentielle de la distance entre z_1 et z_2.

Puisque la classe de ν_o^F charge tous les ouverts, l'ensemble $\mathscr{X}$ est dense. Alors pour $T = \operatorname{dist}(z_1, z_2)$ fixé, il existe deux points z et z' à distance 1 respectivement de z_1 et z_2 tels la géodésique (z, z') ait ses deux extrémités dans $\mathscr{X}$.

Un argument de convexité montre alors que le segment géodésique $[z, z']$ 1-piste le segment $[z_1, z_2]$, et de cela, ainsi que de la Hölder continuité de $\widetilde{F}$, on déduit que les quantités suivantes sont en rapport borné *indépendamment de T*

- $\exp[\int_{z_1}^{z_2}(\widetilde{F} - P(F))]$ et $\exp[\int_{z}^{z'}(\widetilde{F} - P(F))]$;
- $e^{-\operatorname{dist}(z_1,z_2)h_{\mu_F}}$ et $e^{-\operatorname{dist}(z,z')h_{\mu_F}}$.

Nous en déduisons que le rapport entre $\exp[\int_{z_1}^{z_2}(\widetilde{F} - P(F)]$ et $e^{-\operatorname{dist}(z_1,z_2)h_{\mu_F}}$ est sous-exponentiel en $\operatorname{dist}(z_1, z_2)$, et ce quels que soient z_1 et z_2. Cela permet en particulier de conclure la preuve du lemme. □

Fin de la preuve de la proposition principale. Nous pouvons conclure à présent exactement comme dans la preuve pour le potentiel. Une application des deux lemmes 6.3.21 et 6.3.22 fournit une constante $C_3 > 0$, telle que pour tout $\xi \in N(\infty)$, tout z sur le rayon géodésique $[o, \xi)$, et tout indice i, on a :

$$k_i \leq C_3 e^{-ih_{\mu_F} R/4},$$

où k_i est la borne supérieure de $k^F(z_i, z; \xi)$, pour $\xi \in \mathcal{O}_i \backslash \mathcal{O}_{i-1}$: k_i est donc dominé par le terme général d'une série géométrique.

Cela nous permet donc de conclure, comme nous l'avions fait dans le cas particulier $F = 0$. $\square$

Chapitre VII

Résultats d'unicité et d'équidistribution

1 | Résultats d'unicité dans le cas des fibrés feuilletés projectifs

Le but de cette section est de prouver quelques résultats d'unicité dans le cas des fibrés feuilletés dont la fibre est $\mathbb{CP}^1$, *lorsqu'il n'y a pas de mesure invariante par holonomie*. Plus précisément, nous prouvons que, dans le cas où la base est courbée négativement :

1. les feuilletages stables et instables du flot géodésique feuilleté sont uniquement ergodiques ;
2. il existe une unique mesure de Gibbs pour le flot géodésique feuilleté associé à tout potentiel Hölder ;
3. il y a une unique mesure F-harmonique pour tout potentiel Hölder.

Dans tout ce qui suit, B sera une variété Riemannienne close portant un flot d'Anosov φ_t de classe C^2 et topologiquement mélangeant. Nous considérons un fibré feuilleté avec une fibre $\mathbb{CP}^1$ et une holonomie projective $\rho : \pi_1(B) \to PSL_2(\mathbb{C})$, $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$. Nous supposons que les feuilles sont paramétrées par la structure Riemannienne de la base. Comme nous l'avons fait au chapitre précédent, nous pouvons relever tous les objets reliés à φ_t par la fibration : nous avons donc un flot feuilleté Φ_t avec des feuilletages invariants $\overline{\mathscr{W}}^\star$, et des familles de mesures dans les feuilles notées $(\bar{\lambda}^\star_{F,x})_{x\in M}$ ($\star = cs, cu, s, u$).

1.1 – Un cocycle projectif localement constant

Dans [BGV], Bonatti, Gómez-Mont et Viana ont remarqué que le flot feuilleté Φ_t est un *cocycle projectif localement constant* au dessus de φ_t. En effet, par définition, nous savons qu'au dessus d'une carte trivialisante U, les orbites de Φ_t sont juste des copies φ_t, avec le même paramétrage. Ainsi le flot Φ_t envoie fibre sur fibre. Nous noterons ainsi le cocycle obtenu :

$$A_t(p) = (\Phi_t)_{|V_p} : V_p \longrightarrow V_{\varphi_t(p)},$$

pour $t \in \mathbb{R}$, et $p \in B$. Nous avons ainsi la relation de cocycle suivante :

$$A_{t_1+t_2}(p) = A_{t_1}(\varphi_{t_2}(p))A_{t_2}(p).$$

Remarquons que lorsqu'on choisit un segment d'orbite $c = \varphi_{[0,t]}(p)$, alors $A_t(p)$ est l'application d'holonomie le long du chemin c. Le cocycle est donc projectif : le flot relevé Φ_t envoie fibre sur fibre comme un élément de $PSL_2(\mathbb{C})$. Dire que ce flot est localement constant est exactement la même chose que de dire que le fibré est plat. Si deux segments d'orbites $c = \varphi_{[0,t]}(p)$ et $c' = \varphi_{[0,t']}(p')$ sont recouverts par la même chaîne de cartes trivialisantes, alors les transformations d'holonomie le long de c et c' sont les mêmes : $A_t(p)$ et $A_{t'}(p')$ sont égales en tant que transformations de la droite projective $\mathbb{CP}^1$. Lorsque nous introduirons les partitions de Markov associées au fibré, nous éclaircirons un peu ce point.

1.2 – Critère pour l'existence d'exposants de Lyapunov non nuls

Exposants de Lyapunov. Le théorème d'Oseledets assure l'existence d'exposants de Lyapunov pour ce cocycle sur un ensemble de Borel de mesure pleine pour toute mesure invariante par le flot φ_t.

Pour tout $p \in B$ se trouvant dans cet ensemble de Borel, ses exposants de Lyapunov maximal et minimal sont respectivement définis par les formules suivantes :

$$\chi^+(p) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(||A_t(p)||),$$

$$\chi^-(p) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(||A_t(p)^{-1}||^{-1}).$$

En utilisant le codage des flots d'Anosov, Bonatti, Gómez-Mont et Viana ont prouvé le théorème suivant :

Theorème 7.1.1 (Bonatti, Gómez-Mont, Viana)**.** *Soit φ_t un flot d'Anosov de classe C^2 et topologiquement mélangeant sur une variété Riemannienne close B, et $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté projectif au dessus de B. Supposons que les feuilles soient localement isométriques à B, et considérons le flot hyperbolique feuilleté Φ_t. Alors nous avons la dichotomie suivante :*

- *soit il existe une mesure de probabilité sur $\mathbb{CP}^1$ invariante par le groupe d'holonomie ;*
- *ou il existe un ensemble de Borel $\mathscr{X}$, plein pour tout état de Gibbs de φ_t associé à un potentiel Hölder, tels que le cocycle associé à Φ_t a un exposant de Lyapunov maximal strictement positif en tout point de $\mathscr{X}$.*

Dans le reste de la section *nous supposerons donc qu'il n'y a pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{CP}^1$ invariante par le groupe d'holonomie $\rho(\pi_1(B))$.*

Sections de Lyapunov. Par le théorème 7.1.1, et le théorème d'Oseledets, nous avons :

Proposition 7.1.2. *Pour tout $p \in \mathscr{X}$ il y a une décomposition de la fibre $V_p = \sigma^+(p) \oplus \sigma^-(p)$ telle que :*

1. *elle varie mesurablement avec le p ;*
2. *elle commute avec le cocycle : pour tout $p \in \mathscr{X}$ et $t \in \mathbb{R}$, $A_t(p)\sigma^\pm(p) = \sigma^\pm(\varphi_t(p))$;*
3. *pour tout $p \in \mathscr{X}$, nous avons les propriétés suivantes :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{dist}_{V_p}(A_t(p)x, \sigma^+(\varphi_t(p))) = -2\lambda^+(p) \quad pour\ tout\ x \in V_p \setminus \{\sigma^-(p)\},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{dist}_{V_p}(A_{-t}(p)x, \sigma^-(\varphi_{-t}(p))) = -2\lambda^+(p) \quad pour\ tout\ x \in V_p \setminus \{\sigma^+(p)\}.$$

4. *les sections sont déterminées par les propriétés suivantes :*

$$\lim_{t\to\infty} ||A_{-t}(p)v|| = 0 \quad si\ et\ seulement\ si\ v \in \sigma^+(p),$$

$$\lim_{t\to\infty} ||A_t(p)v|| = 0 \quad si\ et\ seulement\ si\ v \in \sigma^-(p).$$

Remarque. Les applications $\sigma^\pm$ sont des sections mesurables du fibré appelées *sections de Lyapunov*. En particulier, elles trivialisent le fibré, qui peut être linéarisé au dessus de $\mathscr{X}$, la dernière propriété énoncée dans la proposition précédente l'est dans ce contexte. Ici, $A_t(p)$ agit sur les vecteurs de $\mathbb{C}^2$: même si $A_t(p)v$ n'est pas bien défini a priori, puisque $A_t(p)$ est une matrice *au signe près*, sa norme l'est.

Proposition 7.1.3. 1. *Les deux sections commutent avec le flot : $\Phi_t \circ \sigma^\pm = \sigma^\pm \circ \varphi_t$.*

2. *La section σ^+ préserve le feuilletage instable, c'est-à-dire que $\sigma^+(W^u(p)) = \overline{W}^u(\sigma^+(p))$, et commute avec les transformations d'holonomie instable.*
3. *La section σ^- préserve le feuilletage stable, c'est-à-dire que $\sigma^-(W^s(p)) = \overline{W}^s(\sigma^-(p))$, et commute avec les transformations d'holonomie stable.*

Cette proposition est dûe à Bonatti et Gómez-Mont (voir [BG]), qui ont l'ont prouvée dans le cas où la base est le fibré unitaire tangent à une surface hyperbolique, avec le flot géodésique. Nous reproduisons leur argument ci-dessous dans notre contexte.

Preuve. Les sections commutent avec les flots à cause de la propriété de commutation énoncée dans la proposition 7.1.2.

Il suffit de prouver la deuxième assertion : la troisième suivra par un argument symétrique. Il est plus facile de travailler avec la linéarisation du cocycle au dessus de $\mathscr{X}$. Prenons deux points $p, q \in \mathscr{X}$ qui appartiennent à la même variété instable, et considérons un segment instable les reliant que nous désignerons par I^u. Considérons le relevé de ce segment commençant en un point v de la fibre $\mathbb{C}^2$ de p tel que $v \in \sigma^+(p)$. Nous devons prouver que le point d'arrivée, noté w, appartient à $\sigma^+(q)$.

Puisque le segment I^u est instable, sa longueur est contractée exponentiellement par itération négative du cocycle. Puisque par ailleurs $v \in \sigma^+(p)$, son image par itération négative du cocycle tend vers zéro. Finalement, par l'inégalité triangulaire, l'image de w par itération négative du cocycle tend vers zéro : ainsi w appartient à $\sigma^+(q)$ et est l'image de v par holonomie le long de I^u. □

1.3 – Remonter les états de Gibbs

Les relations de cocycles. Nous avons défini précédemment des cocycles associés aux feuilletages stable et instable du flot feuilleté Φ_t : voir les relations (6.1.1), (6.1.2). Nous nous intéressons dans ce qui suit aux propriétés ergodiques de ces feuilletages : en particulier, nous voulons étudier l'existence et l'unicité de familles de mesures sur les ensembles $\mathscr{T}^+$ et $\mathscr{T}^-$ des transversales locales respectivement de $\overline{W}^u$ et $\overline{W}^s$, mettons $(\nu^+_{F,T})_{T\in\mathscr{T}^+}$ et $(\nu^-_{F,T})_{T\in\mathscr{T}^-}$, telles que :

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}^u_{T_1\to T_2} * \nu^+_{F,T_1}\right]}{d\nu^+_{F,T_2}}(x) = \bar{k}^u_F(x, \mathrm{hol}^u_{T_2\to T_1}(x)), \tag{7.1.1}$$

où $T_1, T_2 \in \mathscr{T}^+$, et x appartient au domaine d'une application d'holonomie $\mathrm{hol}^u_{T_2\to T_1}$, et :

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}^s_{T_1\to T_2} * \nu^-_{F,T_1}\right]}{d\nu^-_{F,T_2}}(x) = \bar{k}^s_F(x, \mathrm{hol}^s_{T_2\to T_1}(x)), \tag{7.1.2}$$

où $T_1, T_2 \in \mathscr{T}^-$, et x appartient au domaine d'une application d'holonomie $\mathrm{hol}^s_{T_2\to T_1}$.

Le but de ce qui suit est de prouver que lorsqu'il n'y a pas de mesure sur la fibre invariante par le groupe d'holonomie, de telles mesures existent et sont uniques pour tout potentiel Hölder. En particulier, nous voulons prouver que dans ce cas, les feuilletages stables et instables sont uniquement ergodiques.

Remarque. D'après le lemme 1.3.4, il suffit de prouver l'existence d'une famille de mesures vérifiant la condition de cocycle (7.1.1) (resp. (7.1.2)) sur un système complet de transversales au feuilletage instable (resp. feuilletage stable), pour obtenir une famille de mesures sur toute les transversales du feuilletage instable (resp. feuilletage stable).

Mesures commutant avec les sections de Lyapunov. Nous présentons une conséquence de la proposition 7.1.3 qui est facile, mais qui sera importante par la suite. Nous rappelons que nous avons relevé via la fibration les familles de mesures $(\lambda^{\star}_{F,p})_{p\in B}$, $\star = s, u$ et ce pour tout potentiel Hölder $F : B \to \mathbb{R}$. Plus précisément, si $\star = s$ ou u, alors, pour tout $x \in M$, $p = \Pi(x)$, et $D \subset \overline{W}^{\star}(x)$, nous avons défini :

$$\bar{\lambda}^{\star}_{F,x}(D) = \lambda^{\star}_{F,p}(\Pi(D)).$$

De plus, par la proposition 7.1.3, pour tout $p \in \mathscr{X}$, la restriction de Π à $\overline{W}^{u}_{loc}(\sigma^{+}(p))$ (resp. $\overline{W}^{s}_{loc}(\sigma^{-}(p))$) est un inverse local de σ^{+} (resp. σ^{-}). Nous obtenons donc le :

Lemme 7.1.4. *Soit $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Alors les sections de Lyapunov commutent avec les mesures au sens que pour tout $p \in \mathscr{X}$,*

$$\sigma^{+} * \lambda^{u}_{F,p} = \bar{\lambda}^{u}_{F,\sigma^{+}(p)} \ \ et \ \ \sigma^{-} * \lambda^{s}_{F,p} = \bar{\lambda}^{s}_{F,\sigma^{-}(p)}.$$

Relevés des états de Gibbs. Tout état de Gibbs donne mesure pleine au Borélien $\mathscr{X}$: ils peuvent tous être relevés par les sections de Lyapunov. Si $F : B \to \mathbb{R}$ est un potentiel Hölder, et si μ_F est l'état de Gibbs, nous définirons :

$$\mu^{+}_{F} = \sigma^{+} * \mu_F, \qquad \mu^{-}_{F} = \sigma^{-} * \mu_F.$$

Puisque les sections de Lyapunov commutent avec les flots, *ces mesures sont invariantes par Φ_t*. Le théorème 7.4.1 que nous prouvons en appendice entraîne le théorème suivant :

Theorème 7.1.5. *Les mesures μ^{+}_{F} et μ^{-}_{F} sont les seules mesures invariantes et ergodiques pour Φ_t se projetant μ_F.*

Désintégrations dans les plaques stables et instables. Nous allons déduire à présent de la *structure de produit local* de μ_F, que μ^{+}_{F} possède une désintégration absolument continue par rapport à $(\overline{W}^{u}, \overline{\lambda}^{u}_{F,x})$, et que μ^{-}_{F} a une désintégration absolument continue par rapport à $(\overline{W}^{s}, \overline{\lambda}^{s}_{F,x})$. Pour ce faire, recouvrons B par des petits ouverts possédant la structure de produit local : $V_i = [W^{u}_{loc}(p_i), W^{cs}_{loc}(p_i)]$, qui de plus trivialisent le fibré. Nous avons vu dans le théorème 2.1.7 l'existence de densités $\psi^{u}_{F,p}$ définies pour $p \in V_i$ satisfaisant les relations (2.1.7), et telle que μ_F soit obtenu, en restriction à V_i par intégration des mesures $\psi^{u}_{F,p}\lambda^{u}_{F,p}$, contre λ^{cs}_{F,p_i}, avec $p \in W^{cs}_{loc}(p_i)$.

Un système complet de transversales au feuilletage instable dans M est donné par les $T^{cs}_{i} = \Pi^{-1}(W^{cs}_{loc}(p_i))$. De plus, nous pouvons recouvrir M par les préimages $U_i = \Pi^{-1}(V_i) = \bigcup_{x\in T^{cs}_{i}} \overline{W}^{u}_{loc}(x)$. Nous pouvons alors relever les densités aux ensembles U_i : nous désignons les relevés par $\bar{\psi}^{u}_{F,x}$.

Bien entendu, par un argument symétrique, si nous changeons les rôles des feuilletages instable et stable, nous voyons que les ensembles U_i sont également remplis par des plaques stables fortes, sur lesquelles sont définies des densités locales $\bar{\psi}^{s}_{F,x}$, et que $T^{cu}_{i} = \Pi^{-1}(W^{cu}_{loc}(p_i))$ est un système complet de transversales pour $\overline{\mathscr{W}}^{s}$.

Nous pouvons alors désintégrer les mesures μ^{+}_{F} et μ^{-}_{F} respectivement dans les plaques instables et stables :

Proposition 7.1.6. *Soit $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder, et $\overline{F} : M \to \mathbb{R}$ son relevé par la fibration Π. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de M obtenu en relevant un recouvrement de B par de petits ouverts possédant la structure de produit local comme expliqué ci-dessus. Alors il existe, pour $\star = cs$ ou cu, une famille de mesures sur $T^{\star}_{i}$, que l'on note $\nu^{\star}_{F,p_i}$, telle que :*

– *μ^{+}_{F} est obtenu en restriction à U_i en intégrant les mesures $\bar{\psi}^{u}_{F,x}\bar{\lambda}^{u}_{F,x}$ contre ν^{cs}_{F,p_i} ;*

– *μ_F^- est obtenu en restriction à U_i en intégrant les mesures $\bar\psi^s_{F,x}\bar\lambda^s_{F,x}$ contre ν^{cu}_{F,p_i}.*
De plus, les familles ν^{cs}_{F,p_i} et ν^{cu}_{F,p_i} vérifient respectivement les relations de cocycle (7.1.1) et (7.1.2).

Preuve. Les mesures que nous recherchons sont $\nu^{cs}_{F,p_i} = \sigma^+ * \lambda^{cs}_{F,p_i}$ et $\nu^{cu}_{F,p_i} = \sigma^- * \lambda^{cu}_{F,p_i}$. Nous savons par le lemme 7.1.4 que la section σ^+ (resp. σ^-) commute avec les familles définies sur les variétés instables locales (resp. stables locales) : puisque μ_F a la structure de produit local, nous en déduisons les deux premières assertions.

Les relations de cocycles sont clairement vérifiées car, par la proposition 7.1.3, σ^+ et σ^- commutent respectivement avec les holonomies des feuilletages instable et stable, et car les familles $(\lambda^{cu}_{F,p_i})_{i\in I}$ et $(\lambda^{cs}_{F,p_i})_{i\in I}$, satisfont les relations (2.1.3) et (2.1.4). □

Corollaire 7.1.7. *La mesure μ_F^+ est une mesure de Gibbs pour le potentiel $\overline{F}$.*

Remarque. Nous avons été conduits à faire un choix dans la définition de mesure de Gibbs. Nous aurions très bien pu décider d'appeler Gibbsienne une mesure de probabilité invariante par le flot, et dont la désintégration dans les variétés stables serait absolument continue par rapport à $\bar\lambda^s_{F,x}$. Dans ce cas, μ_F^- aurait été une mesure de Gibbs. Ce qui importe est que quel que soit notre choix, les mesures μ^+ et μ^- ne peuvent pas être toutes deux des mesures de Gibbs en général : sinon, nous aurions une mesure transverse invariante. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

1.4 – Désintégration singulière dans les feuilles stables et instables

Partitions de Markov adaptées au fibré. Nous avons dit plus tôt que le cocycle défini par le flot géodésique feuilleté est localement constant. Cette propriété est de prime importance pour nous, nous allons donc éclairer un peu ce que nous entendons par là. L'idée principale de [BGV] était d'utiliser les partitions de Markov adaptées à un atlas trivialisant $\Pi : M \to B$.

Prenons une famille de cartes trivialisantes $(V_1, ..., V_k)$ dans B telles que $V_i \cap V_j$ soit connexe ou vide. Il existe, par le théorème 1.2.6 , une partition de Markov adaptée à l'atlas. Les rectangles de la partition seront notés $R_i = [A_i^u, A_i^s]$ (voir la définition 1.2.2)), et les cubes C_i (voir la formule (1.2.4) pour la définition), pour $i \in I$. Nous rappelons que les cubes sont remplis par des domaines instables compacts qui sont l'adhérence de leur intérieur, et notés $A_i^u(p)$, $i \in I$: nous les avons appelés les plaques markoviennes instables.

Par le théorème 1.2.6, il existe deux applications surjectives $\alpha, \beta : I \to \{1, ..., k\}$, telles que lorsque $p \in C_i$, nous ayons $p \in V_{\alpha(i)}$ et $\varphi_{r(p)}(p) \in V_{\beta(i)}$. Ainsi, pour tout $p \in \operatorname{Int} C_i$, $A_{r(p)}(p)$ est l'application d'holonomie $\tau_{\alpha(i)\beta(i)}$. En particulier, l'holonomie le long de segments d'orbites qui restent à l'intérieur des cubes est triviale : en ce sens, le cocycle est localement constant.

Souvenons-nous de la définition de $\mathscr{C}$ (voir la formule (1.2.3)). C'est l'ensemble des points dont les retours dans $\bigcup R_i$ sont toujours à l'intérieur des rectangles. Par le théorème 1.2.6, cet ensemble est plein pour toute mesure de probabilité chargeant les ensembles ouverts.

Affirmation. *Pour tout état de Gibbs μ_F, nous avons $\mu_F(\mathscr{C} \cap \bigcup_i \operatorname{Int} C_i) = 1$.*

Tout d'abord, il est évident que tout rectangle a une mesure nulle pour toute mesure de probabilités invariante m. En effet, un rectangle R_i est topologiquement transverse au flot, donc il y a un petit $\varepsilon > 0$ tel que les images $\varphi_t(R_i)$, $0 \le t \le \varepsilon$ soient disjointes : par invariance de m, toutes les images $\varphi_t(R_i)$ ont la même mesure, et puisque m est finie, cette mesure est nulle. À présent, nous remarquons que le bord d'un cube C_i est une union de rectangles, et de parties de $\mathscr{C}' = B \setminus \mathscr{C}$: pour toute mesure de probabilité invariante chargeant les ouverts, $m(\partial C_i) = 0$.

En conséquence, nous supposerons que, $\mathscr{X} \subset \mathscr{C} \cap \bigcup_i \operatorname{Int} C_i$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la propriété de Markov.

Lemme 7.1.8. *Soit $p \in \operatorname{Int} C_i$ pour $i \in I$. Alors la valeur de A_{t^-}, pour $t^- \leq 0$, est constante sur $A_i^u(p)$, et celle de A_{t^+}, pour $t^+ \geq 0$, est constante sur $A_i^s(p)$.*

Preuve. Nous utilisons la propriété de Markov (voir la définition 1.2.4)). Si $q \in \operatorname{Int} A_i^u(p)$, alors pour tout $t^- \leq 0$, $\varphi_{[t^-,0]}(p)$ et $\varphi_{[t^-,0]}(q)$ visitent exactement les mêmes cubes de la partition. Puisque la valeur du cocycle A_{t^-} ne dépend que de la succession de cubes visités par la trajectoire dans le passé entre 0 et t^-, elle est indépendante du choix de $q^- \in A_i^u(p)$.

Le même argument dans le futur donne la preuve de la dernière partie du lemme. □

Sections de Lyapunov comme graphes locaux. Puisqu'un cube C_i est inclus dans une carte trivialisante $V_{\alpha(i)}$: il trivialise le fibré. Ainsi, les deux sections σ^+ et σ^- peuvent être écrites, en restriction à C_i, comme (Id, s_i^+) et (Id, s_i^-), où $s_i^\pm : C_i \to \mathbb{CP}^1$ sont des applications mesurables.

Lemme 7.1.9. *Soit $i \in I$. Alors, pour μ_F-presque tout $p \in \operatorname{Int} C_i$,*

1. *l'application s_i^+ est constante dans $W^{cu}_{loc}(p) \cap \operatorname{Int} C_i$;*
2. *l'application s_i^- est constante dans $W^{cs}_{loc}(p) \cap \operatorname{Int} C_i$;*

Preuve. Nous ne prouvons que la première propriété : la seconde suit par un argument symétrique. Nous savons, par la proposition 7.1.3 que σ^+ commute avec les transformations d'holonomie instable. De plus, elle commute avec les flots, et il n'y a pas d'holonomie le long d'un segment d'orbite qui reste à l'intérieur d'un cube. Cela entraîne que s_i^+ est constante sur presque toute plaque centre-instable incluse dans $\operatorname{Int} C_i$. □

Le lemme suivant nous dit que les mesures μ_F^+ et μ_F^- peuvent être obtenues par intégration de mesures supportées respectivement sur des graphes au dessus de plaques stables et instables.

Notons U_i la préimage $\Pi^{-1}(\operatorname{Int} C_i)$. Chaque cube est rempli de plaques stables fortes et instables fortes. Ainsi, U_i esr rempli par les préimages de ces plaques par la fibration Π, et nous écrivons :

$$U_i = \bigsqcup_{q \in W^{cu}_{loc}(p) \cap \operatorname{Int} C_i} T_i^s(q) = \bigsqcup_{q \in W^{cs}_{loc}(p) \cap \operatorname{Int} C_i} T_i^u(q),$$

où, par définition, $T_i^\star(q) = \Pi^{-1}(W^\star_{loc}(q) \cap \operatorname{Int} C_i)$. nous nous intéressons à la désintégration de la restriction $(\mu_F^+)_{|U_i}$ (resp. $(\mu_F^-)_{|U_i}$) dans les ensembles $T^s(q)$ (resp. $T^u(q)$).

Lemme 7.1.10. *Soit $i \in I$, et $p \in \operatorname{Int} C_i \cap \mathscr{X}$.*

1. *Les mesures conditionnelles de $(\mu_F^+)_{|U_i}$ dans la partition $(T_i^s(q))_{q \in W^{cu}_{loc}(p) \cap \operatorname{Int} U_i}$ par rapport à $\lambda^{cu}_{F,p}$ sont données par $\sigma^+ * (\psi^s_{F,q}\lambda^s_{F,q})$.*
2. *Les mesures conditionnelles de $(\mu_F^-)_{|U_i}$ dans la partition $(T_i^u(q))_{q \in W^{cs}_{loc}(p)} \cap \operatorname{Int} U_i$ par rapport à $\lambda^{cs}_{F,p}$ sont données par $\sigma^- * (\psi^u_{F,q}\lambda^u_{F,q})$.*

Preuve. Nous ne prouvons que la première assertion. Il découle du théorème 2.1.7 que μ_F est obtenu en restriction à U_i, par intégration des mesures $\psi^s_{F,q}\lambda^s_{F,q}$ contre $\lambda^{cu}_{F,p}$. Pour conclure, nous devons pousser cette structure de produit local par σ^+, puis remarquer qu'à cause du lemme 7.1.9, s_i^+ est constant sur $W^{cu}_{loc}(p) \cap \operatorname{Int} U_i$. □

Désintégrations singulières. Nous allons à présent énoncer la propriété clé des mesures $\mu_F^{\pm}$. Nous savons par la proposition 7.1.6 que μ_F^+ (resp. μ_F^-) a une désintégration absolument continue par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^u, \bar{\lambda}^u_{F,x})$ (resp.$(\overline{\mathscr{W}}^s, \bar{\lambda}^s_{F,x})$). Nous montrerons plus d'intérêt à la désintégration de μ_F^+ par rapport au second couple, et à celle de μ_F^- par rapport au premier. La proposition suivante est le résultat principal de la section.

Proposition 7.1.11. *Soit $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté projectif au dessus d'une variété Riemannienne B portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant et de classe C^2. Supposons que les feuilles soient localement isométriques à la base. Supposons de plus qu'il n'y ait pas de mesure invariante par l'action du groupe d'holonomie. Alors :*

1. *μ_F^+ a une désintégration singulière par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^s, \bar{\lambda}^s_{F,x})$.*
2. *μ_F^- a une désintégration singulière par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^u, \bar{\lambda}^u_{F,x})$.*

Nous ne prouverons que la seconde assertion : la première suivra par un argument symétrique. Le lemme suivant donne une condition équivalente à la conclusion de la proposition, en utilisant le lemme de désintégration 1.5.4 qui traite des désintégrations de mesures supportées par le graphe de fonctions mesurables.

Lemme 7.1.12. *La mesure μ_F^- a une désintégration singulière par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^u, \bar{\lambda}^u_{F,x})$ si et seulement si pour tout $i \in I$, et $p \in \mathscr{X} \cap \operatorname{Int} C_i$, il n'y a pas d'ensemble de Borel $D \subset A_i^u(p)$ de mesure positive pour $\lambda^u_{F,p}$ sur lequel s_i^- est constant.*

Preuve. Puisque $(U_i)_{i\in I}$ est une partition modulo μ_F^-, cette mesure a une désintégration singulière par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^u, \bar{\lambda}^u_{F,x})$ si et seulement si c'est le cas pour toutes les restrictions $(\mu_F^-)_{|U_i}$, $i \in I$.

Par le lemme 7.1.10, si l'on choisit $i \in I$ et $p_i \in \operatorname{Int} C_i \cap \mathscr{X}$, les mesures conditionnelles de $(\mu_F^-)_{|U_i}$ dans les $T^u(p)$ pour $p \in W^{cs}_{loc}(p_i) \cap \operatorname{Int} C_i$, sont données par :

$$\sigma^- * (\psi^u_{F,p} \lambda^u_{F,p}).$$

La partition de U_i par les variétés instables locales est une "sous-partition" de celle par les $T^u(p)$. L'unicité dans le théorème de Rokhlin assure que pour μ_F^--presque tout x, la mesure conditionnelle de μ_F^- dans $\overline{W}^u_{loc}(x)$ coïncide avec celle de $\sigma^- * (\psi^u_{F,p} \lambda^u_{F,p})$, où $x \in T^u(p)$.

Ainsi, nous sommes amenés à désintégrer une mesure supportée par un graphe. C'est ici que notre lemme de désintégration 1.5.4 rentre en jeu : en restriction à C_i, $\sigma^- = (Id, s_i^-)$. Ainsi, ce lemme appliqué aux mesures $\sigma^- * (\psi^u_{F,p} \lambda^u_{F,p})$, entraîne que cette mesure a une désintégration singulière si et seulement s'il n'y pas de $D \subset A_i^u(p)$ positif pour $\lambda^u_{F,p}$ sur lequel s_i^- est constant. □

Le reste de la preuve est un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe $p \in \mathscr{X} \cap \operatorname{Int} C_{i_0}$, pour un certain indice $i_0 \in I$, ainsi qu'un ensemble Borélien $D \in A^u_{i_0}(p)$ avec $\lambda^u_{F,p}(D) > 0$ sur lequel s_i^- est constant (nous supposons sans restriction que $D \subset \mathscr{X}$). La stratégie pour conclure la preuve est la suivante. Par itération positive de $(\lambda^u_{F,p})_{|D} / \lambda^u_{F,p}(D)$ par le flot φ_t, nous pouvons reconstruire l'état de Gibbs μ_F, grâce au théorème 2.1.8, ceci prouvera que s_i^- est constant sur presque toute plaque markovienne instable. En utilisant un argument *à la Hopf*, nous prouverons alors que pour tout $i \in I$, l'application correspondante s_i^- est constante μ_F-presque partout à l'intérieur du cube C_i. Finalement, nous prouverons que cela entraîne l'existence d'une mesure transverse invariante par holonomie de $\mathscr{F}$, contredisant ainsi les hypothèses.

La preuve du lemme suivant est assez technique et sera prouvée plus tard. Après l'avoir énoncé, nous montrerons comment il entraîne la proposition 7.1.11.

Lemme 7.1.13. *Supposons qu'il existe $i_0 \in I$, $p \in \operatorname{Int} C_{i_0} \cap \mathscr{X}$, et $D \subset A^u_{i_0}(p)$ tels que :*
- $\lambda^u_{F,p}(D) > 0$;
- $s^-_{i_0}$ *est constant sur* D.

Alors, pour tout $i \in I$, s^-_i est constant μ^-_F-presque partout sur $\operatorname{Int} C_i$.

Fin de la preuve de la proposition 7.1.11. Nous allons raisonner par l'absurde en montrant que si la conclusion de la proposition n'est pas satisfaite, alors les mesures conditionnelles de μ^-_F dans les fibres sont invariantes par toutes les transformations d'holonomie du feuilletage $\mathscr{F}$. En particulier, il existe alors une mesure sur $\mathbb{CP}^1$ invariante par l'action du groupe d'holonomie $\rho(\pi_1(B))$, ce qui contredit les hypothèses.

Considérons la désintégration $(\theta_p)_{p\in B}$ de μ^-_F dans les fibres de M. Les mesures θ_p sont définies μ_F-presque partout, et sont égales aux masses de Dirac $\delta_{\sigma^-(p)}$. Par la proposition 7.1.3, il vient que cette famille de mesures est invariante par toute transformation d'holonomie le long d'un chemin tangent à $\mathscr{W}^{cs}$.

À présent, supposons que la conclusion de la proposition 7.1.11 ne soit pas satisfaite : les mesures conditionnelles de μ^-_F sur les plaques instables ne sont pas singulières par rapport à $(\bar{\lambda}^u_{F,x})$. Par le lemme 7.1.12, cela entraîne l'existence d'un cube $C_{i_0} \subset B$, et d'un ensemble de Borel D inclus dans un domaine instable de C_{i_0} positif pour $\lambda^u_{F,p}$ sur lequel $s^-_{i_0}$ est constant. Finalement, par le lemme 7.1.13, cela entraîne que sur tout cube C_i, l'application s^-_i est constante μ_F-presque partout. Si l'on préfère, pour tout indice i les mesures conditionnelles $(\theta_p)_{p\in C_i}$ sont invariantes par toute transformation d'holonomie le long d'un chemin restant dans C_i.

Tout chemin dans B est homotope à la concaténation d'un chemin tangent à $\mathscr{W}^{cs}$ et d'un chemin tangent à $\mathscr{W}^u$. Ainsi, pour prouver que la famille $(\theta_p)_{p\in B}$ est invariante par toutes les transformations d'holonomie, il est suffisant de prouver qu'elle est invariante par les transformations d'holonomie le long de chemins instables. Considérons deux points p et q de B génériques pour μ_F, appartenant à la même variété instable, et choisissons un chemin instable γ les reliant. Son image par itération par le flot suffisamment longue dans le passé est un chemin $\gamma' = \varphi_{-t}(\gamma)$ appartenant à l'intérieur d'un certain cube C_i, et la transformation d'holonomie le long de γ est la composition des transformations d'holonomie le long de $\varphi_{[0,t]}(\varphi_{-t}(q))$, de γ', et de $\varphi_{[-t,0]}(p)$. Puisque les transformations d'holonomie le long des segments d'orbites laissent invariante la désintégration de μ^-_F dans les fibres, et puisque toutes les transformations d'holonomie le long de C_i laissent invariante la famille de mesures $(\theta_p)_{p\in C_i}$, nous concluons que l'holonomie le long de γ envoie θ_p sur θ_q. CQFD. □.

1.5 – Preuve du lemme 7.1.13

Sélection de bonnes plaques markoviennes instables. Jusqu'à la fin du paragraphe, nous supposerons l'existence d'un ensemble Borélien $D \subset A^u_{i_0}(p)$, pour un certain $p \in \operatorname{Int} C_{i_0}$ de mesure positive pour $\lambda^u_{F,p}$ et sur lequel $s^-_{i_0}$ est constant.

Fixons un nombre $\delta > 0$ inférieur à $(\mu_F(C_i)/4)^2$, $i \in I$. Par le théorème de densité de Borel (voir le corollaire 2.14 de [Matt]), il existe une petite boule $\mathscr{B} \subset A^u_{i_0}(p)$ telle que $\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B} \setminus D)/\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}) \leq \frac{9}{10}\delta$. De plus, nous pouvons chosir $\mathscr{B}$ suffisamment petite de sorte que $\lambda^u_{F,p}(\partial\mathscr{B}) = 0$.

Lemme 7.1.14. *Il existe un nombre positif T_0 tel que pour $t \geq T_0$, il existe $\mathscr{B}_t \subset \mathscr{B}$ tel que :*

1. $\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t)/\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}) \leq \frac{9}{10}$;
2. $\varphi_t(\mathscr{B}_t)$ *est une union disjointe de plaques markoviennes instables* $A^u_i(q)$.

Preuve. Soit $i \in I$ et $t > 0$. Nous disons qu'une composante connexe de $\operatorname{Int} C_i \cap \varphi_t(\mathscr{B})$ est *markovienne* si c'est une plaque instable markovienne $A_i^u(q)$ pour un certain q : c'est-à-dire si elle croise le cube. Alors,

$$\operatorname{Int} C_i \cap \varphi_t(\mathscr{B}) = \widehat{\mathscr{B}}_{M,i} \sqcup \widehat{\mathscr{B}}_{NM,i},$$

où $\widehat{\mathscr{B}}_{M,i}$ désigne l'union des composantes markoviennes de $\operatorname{Int} C_i \cap \varphi_t(\mathscr{B})$, et $\widehat{\mathscr{B}}_{NM,i}$, son complémentaire (l'union des composantes non-markoviennes).

Soit $\Delta > 0$ une borne supérieure des diamètres des plaques instables markoviennes. L'ensemble $\bigcup_i \widehat{\mathscr{B}}_{NM,i}$ est inclus dans le Δ-voisinage de $\partial\varphi_t(\mathscr{B})$. Cet ensemble étant inclus dans une feuille instable, $\varphi_{-t}\left(\bigcup_i \widehat{\mathscr{B}}_{NM,i}\right)$ est inclus dans le $\Delta C_u e^{-t\chi_u}$-voisinage of $\partial\mathscr{B}$. L'intersection décoissante de ces voisinages est $\partial\mathscr{B}$, qui est de mesure nulle pour $\lambda^u_{F,p}$: il est donc possible de trouver $T_0 > 0$ tel que pour tout $t \geq T_0$,

$$\lambda^u_{F,p}\left[\varphi_{-t}\left(\bigcup_i \widehat{\mathscr{B}}_{NM,i}\right)\right] \leq \frac{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B})}{10}.$$

Il est alors immédiat que, lorsque $t \geq T_0$, l'ensemble $\mathscr{B}_t = \varphi_{-t}\left(\bigcup_i \widehat{\mathscr{B}}_{M,i}\right)$ convienne. □

Remarque 1. Puisque le flot préserve la classe de $\lambda^u_{F,p}$, et puisque chaque $\partial A_i^u(p)$ est de mesure nulle, il existe pour tout $t \geq T_0$ une collection $(D_j)_{j\in J}$ d'ouverts disjoints de $\mathscr{B}_t$ tels que :
- pour tout $j \in J$, $\varphi_t(D_j)$ est une plaque markovienne instable ;
- $\lambda^u_{F,p}\left(\mathscr{B}_t \setminus \bigcup_j D_j\right) = 0$.

Remarque 2. La première assertion du lemme 7.1.14, et le choix de $\mathscr{B}$, entraînent que pour $t \geq T_0$:

$$\frac{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t \setminus D)}{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t)} \leq \delta.$$

Lemme 7.1.15. *Il existe $T_1 \geq T_0$ tel que pour tout $t \geq T_1$ et tout $i \in I$,*

$$\frac{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t \cap \varphi_{-t}(C_i))}{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t)} \geq \frac{\mu_F(C_i)}{2}.$$

Preuve. Nous savons que la famille suivante de mesures :

$$\mu_t = \frac{\varphi_t * (\lambda^u_{F,p})_{|\mathscr{B}}}{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B})},$$

converge vers μ_F (voir le théorème 2.1.8)) lorsque t croît à l'infini. En particulier, puisque pour tout $i \in I$, $\mu_F(\partial C_i) = 0$, nous avons $\lim_{t\to\infty} \lambda^u_{F,p}(\mathscr{B} \cap \varphi_{-t}(C_i))/\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}) = \mu_F(C_i)$. Or l'inégalité suivante a lieu pour tout $t > 0$:

$$\frac{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t \cap \varphi_{-t}(C_i))}{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t)} \geq \frac{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B} \cap \varphi_{-t}(C_i))}{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B})} - \frac{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B} \setminus \mathscr{B}_t)}{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B})}.$$

Le second terme de la différence tend vers zéro (comme nous l'avons vu dans la preuve du lemme 7.1.14) alors que le premier tend vers $\mu_F(C_i)$. Le lemme suit donc. □

À présent, choisissons $t \geq T_1$. Nous avons déjà remarqué (remarque 1) qu'il y a une partition de $\mathscr{B}_t$ modulo $\lambda^u_{F,p}$, notée $(D_j)_{j\in J}$, telle que tous les $\varphi_t(D_j)$ soient des plaques instables markoviennes.

Lemme 7.1.16. *Soit J_0 l'ensemble des indices $j \in J$ tels que $\lambda^u_{F,p}(D_j \setminus D)/\lambda^u_{F,p}(D_j) \geq \sqrt{\delta}$. Alors :*

$$\frac{\lambda^u_{F,p}\left(\bigsqcup_{j\in J_0} D_j\right)}{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t)} \leq \sqrt{\delta}.$$

Preuve. La preuve de ce lemme est une simple application d'une inégalité "à la Markov". Puisque $(D_j)_{j\in J}$ est une partition of $\mathscr{B}_t$ modulo $\lambda^u_{F,p}$, nous avons :

$$\frac{\sum_{j\in J} b_j a_j}{\sum_{j\in J} b_j} = \frac{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t \setminus D)}{\lambda^u_{F,p}(\mathscr{B}_t)},$$

où, pour $j \in J$, $a_j = \lambda^u_{F,p}(D_j \setminus D)/\lambda^u_{F,p}(D_j)$, et $b_j = \lambda^u_{F,p}(D_j)$. En particulier, ce quotient est inférieur à δ.

Puisque J_0 est formé des indices j tels que $a_j \geq \sqrt{\delta}$, nous avons la chaîne suivante d'inégalités :

$$\sqrt{\delta}\frac{\sum_{j\in J_0} b_j}{\sum_{j\in J} b_j} \leq \frac{\sum_{j\in J_0} b_j a_j}{\sum_{j\in J} b_j} \leq \delta.$$

Nous pouvons ainsi conclure puisque $\sum_{j\in J_0} b_j = \lambda^u_{F,p}\left(\bigsqcup_{j\in J_0} D_j\right)$. □

Lemme 7.1.17. *Il existe une constante $K_0 > 1$, independante de t et δ, telle que pour tout $i \in I$ et $t \geq T_1$, il existe $p_i \in \operatorname{Int} C_i$ tel que :*

$$\frac{\lambda^u_{F,p_i}(A^u_i(p_i) \setminus \varphi_t(D))}{\lambda^u_{F,p_i}(A^u_i(p_i))} \leq K_0\sqrt{\delta}.$$

Preuve. Soit $i \in I$, et $t \geq T_1$. D'après le lemme 7.1.15, la proportion dans $\mathscr{B}_t$ des ensembles D_j dont l'image par φ_t est une plaque markovienne instable de C_i est supérieure à $\mu_F(C_i)/2$. Et d'après le lemme 7.1.16, la proportion dans $\mathscr{B}_t$ des ensembles D_j dont l'intersection avec le complémentaire de D pèse plus de $\sqrt{\delta}$ de sa masse totale, est inférieure à $\sqrt{\delta}$. De plus, nous avons choisi un δ tel que $\sqrt{\delta} \leq \mu_F(C_i)/4$.

De tout ceci, nous déduisons l'existence d'un ensemble D_j tel que :

- il y a un $p_i \in \operatorname{Int} C_i$ tel que $\varphi_t(D_j) = A^u_i(p_i)$;
- $\lambda^u_{F,p}(D_j \setminus D)/\lambda^u_{F,p}(D_j) \leq \sqrt{\delta}$.

Le lemme de distorsion 6.1.5 nous permet de conclure :

$$\frac{\lambda^u_{F,p_i}(A^u_i(p_i) \setminus \varphi_t(D))}{\lambda^u_{F,p_i}(A^u_i(p_i))} \leq K_0 \frac{\varphi_t * \lambda^u_{F,p}(A^u_i(p_i) \setminus \varphi_t(D))}{\varphi_t * \lambda^u_{F,p}(A^u_i(p_i))} = K_0 \frac{\lambda^u_{F,p}(D_j \setminus D)}{\lambda^u_{F,p}(D_j)} \leq K_0\sqrt{\delta}.$$

Nous concluons ainsi la preuve du lemme. □

Lemme 7.1.18. *Soit $t \geq T_1$, $i \in I$, et $p_i \in \operatorname{Int} C_i$ comme dans le lemme 7.1.17. L'application s_i^- est constante sur $A^u_i(p_i) \cap \varphi_t(D)$.*

Preuve. Afin de voir cela, nous utilisons le lemme 7.1.8. La valeur du cocycle A_{-t} est constante sur $A^u_i(p_i)$, pour tout $q \in \operatorname{Int} C_i$. Ainsi, si $q_1, q_2 \in A^u_i(p_i) \cap \varphi_t(D)$, nous avons :

$$s_i^-(q_1) = A_{-t}(q_1)^{-1} s_{i_0}^-(\varphi_{-t}(q_1)) = A_{-t}(q_2)^{-1} s_{i_0}^-(\varphi_{-t}(q_2)) = s_i^-(q_2).$$

□

Un argument à la Hopf. Nous savons que dans chaque cube C_i, la fonction s_i^- est constante sur une grande proportion d'une certaine plaque markovienne instable. En utilisant la continuité absolue du feuilletage centre-stable, ainsi que l'invariance de σ^- par les applications d'holonomie le long des chemins centre-stables, nous prouvons que la fonction s_i^- est constante sur une grande proportion du cube C_i. Ceci est l'objet du lemme suivant :

Lemme 7.1.19. *Il existe une constante $K_1 > 1$, indépendante de δ, telle que pour tout $i \in I$, il y ait un ensemble de Borel $O_i \subset \operatorname{Int} C_i$ satisfaisant :*

1. *O_i est saturé dans C_i dans la direction centre-stable ;*
2. *s_i^- est constant sur O_i ;*
3. *pour tout $q \in O_i$, nous avons :*
$$\frac{\lambda^u_{F,q}(A^u_i(q) \setminus O_i)}{\lambda^u_{F,q}(A^u_i(q))} \leq K_1\sqrt{\delta}.$$

Preuve. Soit $i \in I$, et $t \geq T_1$. D'après le lemme 7.1.17, il existe un point $p_i \in \operatorname{Int} C_i$ tel que la proportion pour λ^u_{F,p_i} dans la plaque markovienne instable $A^u_i(p_i)$ du complémentaire de $\varphi_t(D)$ soit inférieur à $K_0\sqrt{\delta}$ pour un certain $K_0 > 1$. Nous pouvons définir $O_i \subset \operatorname{Int} C_i$ comme le saturé de $A^u_i(p_i) \cap \varphi_t(D)$ dans la direction centre-stable.

Par le lemme 7.1.3, la fonction s_i^- est constante dans les plaques centre-stables de C_i ainsi, puisqu'elle est également constante dans $A^u_i(p_i) \cap \varphi_t(D)$, elle l'est dans O_i tout entier.

À présent, si $q \in W^{cs}_{loc}(p_i)$, nous avons :

$$A^u_i(q) \setminus O_i = \operatorname{hol}^{cs}_{p_i \to q}(A^u_i(p_i) \setminus \varphi_t(D)).$$

Le point crucial est alors la propriété suivante d'absolue continuité des transformations d'holonomie centre-stable. Supposons que $q' \in A^u(q)$, et notons $q'' = \operatorname{hol}^{cs}_{q \to p_i}(q')$, ainsi que $\pi^s(q')$ la projection de q' dans $W^s_{loc}(q'')$ le long du flot : il y a un temps $T \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_T(q') = \pi^s(q')$. Nous avons alors :

$$\frac{d\left[\operatorname{hol}^{cs}_{p_i \to q} * \lambda^u_{F,p_i}\right]}{d\lambda^u_{F,q}}(q') = \exp\left[\int_0^\infty (F\circ\varphi_{-t}(q'') - F\circ\varphi_{-t}(\pi^s(q')))\,dt\right]\exp\left[\int_0^T (F\circ\varphi_t(q') - P(F))\,dt\right].$$

Puisque le diamètre des plaques centre-stables à l'intérieur de C_i est uniformément borné, et puisque F est bornée et Hölder continue avec des constantes uniformes, les dérivées de Radon-Nikodym ci-dessus sont uniformément bornées. Par conséquent, la troisième assertion est également prouvée. □

Lemme 7.1.20. *Il existe une constante $K_2 > 1$, indépendante de t et δ, telle que pour tout $i \in I$ et $t \geq T_1$, si O_i est l'ensemble de Borel construit dans le lemme 7.1.19, nous ayons :*

$$\frac{\mu_F(C_i \setminus O_i)}{\mu_F(C_i)} \leq K_2\sqrt{\delta}.$$

Preuve. Nous utilisons la structure de produit local de l'état de Gibbs μ_F dans C_i : cette mesure est obtenue par intégration de mesures $\psi^u_{F,q}\lambda^u_{F,q}$ contre λ^{cs}_{F,p_i}. Puisque les densités $\psi^u_{F,q}$ sont uniformément log-bornées dans les plaques instables, ces mesures finies sont équivalentes à $(\lambda^u_{F,q})_{|A^u_i(q)}/\lambda^u_{F,q}(A^u_i(q))$ avec des dérivées uniformément log-bornées.

Par le théorème de Fubini, nous pouvons conclure la preuve du lemme. □

Fin de la preuve du lemme 7.1.13 Les lemmes 7.1.19 et 7.1.20 donnent pour tout $\delta > 0$, un ensemble de Borel O_i inclus à l'intérieur du cube C_i tel que :

- s_i^- est constant sur O_i ;
- $\mu_F(C_i \setminus O_i)/\mu_F(C_i) \leq K_2\sqrt{\delta}$ pour un nombre $K_2 > 1$ indépendant de δ.

Nous voyons que la constante est indépendante de δ suffisamment petit, en effet deux O_i doivent se couper puisque leurs complémentaires pèsent moins de la moitié de la masse de C_i lorsque δ est assez petit. Appelons cette constante s_i^*. Le complémentaire de $(s_i^-)^{-1}(s_i^*)$ est de mesure arbitrairement petite : il a une mesure nulle pour μ_F, et le lemme est ainsi prouvé. □.

1.6 – Cas particulier des états de u-Gibbs et des mesures harmoniques

Nous allons prouver la proposition 7.1.11 dans deux cas particulier. Le cas des états de u-Gibbs se traite à part, sans vraiment faire appel aux partitions de Markov. Nous avons déjà vu des conditions suffisantes pour l'existence de mesures transverses invariantes dans ce cas là. Nous présentons ce cas particulier parce qu'il est plus simple, parce que nous l'avons déjà essentiellement traité au chapitre V, et parce que nous avions obtenu ce résultat avant d'avoir établi le cas général.

Le cas des mesures harmoniques est plus intéressant. Bien qu'il se déduise également du cas général, il y a une preuve nettement plus simple qui met en jeu une propriété de la moyenne pour les mesures conditionnelles des mesures harmoniques.

Nous montrerons plus tard comment la preuve de cette proposition nous permet de déduire l'unicité des mesures de Gibbs dans la suite.

Cas des états de u-Gibbs. Ce cas a déjà été traité par la proposition 5.4.5 : si jamais la désintégration dans les feuilles stables de l'état de u-Gibbs ergodique μ^+ n'est pas singulière par rapport à Lebesgue, alors c'est que μ^+ est un état de su-Gibbs. Nous avons prouvé au théorème 5.4.1 que cela entraîne alors l'existence d'une mesure transverse invariante par holonomie, d'où la preuve de la proposition 7.1.11 dans ce cadre.

Cas des mesures harmoniques. Nous allons prouver la première assertion de la proposition 7.1.11 (c'est-à-dire celle concernant les désintégrations de μ_H^+ par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^s, \bar{\lambda}_{H,v}^s)$) : l'autre suit par un argument symétrique. Nous allons commencer par traduire la conclusion de la proposition 7.1.11, ainsi que celle du lemme 7.1.12, en termes de désintégration de μ_H^+ dans les fibres unitaires tangentes : nous devrons utiliser une propriété d'absolue continuité du feuilletage centre-instable. Nous rappelons qu'un état de H-Gibbs est associé au potentiel :

$$H(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \log k_{L(v)}(c_v(0), c_v(t); c_v(-\infty)).$$

Nous utiliserons la notation suivante : $\mathscr{W}^+$ désignera le feuilletage de T^1B par les fibres unitaires tangentes, et $\overline{\mathscr{W}}^+$ le feuilletage de $T^1\mathscr{F}$ relevé par $D\Pi$. C'est un feuilletage qui, en restriction aux feuilles de $\widehat{\mathscr{F}}$, est transverse au feuilletage centre-instable du flot géodésique feuilleté. Nous pouvons également définir, sur la fibre unitaire tangente T_p^1B, la mesure ω_p^H qui est la projection sur la fibre de la mesure harmonique en p à l'infini. De même que nous avons relevé les mesures $(\lambda_{H,v}^\star)_{v\in T^1B}$ aux feuilles de $\widehat{\mathscr{F}}$ via la différentielle $D\Pi$, il est possible de relever les mesures ω_p^H. Nous noterons $(\bar{\omega}_x^H)_{x\in M}$ la famille de mesures ainsi obtenue.

Lemme 7.1.21. *Soit $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté projectif au dessus d'une variété Riemannienne close B courbée négativement, et dont les feuilles sont localement isométriques à B. Supposons qu'il* *n'y ait pas de mesure invariante par le groupe d'holonomie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *μ_H^+ a une désintégration singulière par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^s, \bar{\lambda}^s_{H,v})$.*
2. *μ_H^+ a une désintégration singulière par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^+, \bar{\omega}^H_x)$.*
3. *pour* Leb*-presque tout $p \in B$, $s_p^+ * \omega_p^H$ n'a pas d'atome sur la fibre $V_p \simeq \mathbb{CP}^1$.*

Preuve. Nous prouvons dans un premier temps l'équivalence entre les deux premières assertions. Nous savons que $\mathscr{W}^s$ et $\mathscr{W}^+$ sont deux feuilletages de T^1B qui sont uniformément transverses à $\mathscr{W}^{cu}$.

Nous avons la propriété d'absolue continuité suivante. Par définition, les classes harmoniques sur les variétés stables, et sur les fibres unitaires tangentes à B, sont les projections de la classe harmonique à l'infini le long du feuilletage centre-instable. Ainsi, les transformations d'holonomie centre-instable envoient la classe de mesure définie sur les variétés stables par $(\lambda^s_{H,v})_{v \in T^1B}$ sur celle définie sur les fibres unitaires tangentes par $(\omega_p^H)_{p\in B}$. Puis les transformation d'holonomie centre-instable dans $T^1\mathscr{F}$ envoient la classe de mesure $(\bar{\lambda}^s_{H,v})_{v\in T^1\mathscr{F}}$ sur la classe $(\bar{\omega}^H_x)_{x\in M}$.

Nous savons en outre que σ^+ commute avec les holonomies centre-instables. Puisque l'on obtient les mesures conditionnelles de μ_H^+ dans les variétés stables locales en désintégrant les $\sigma^+ * \lambda^u_{H,v}$, et dans les fibres unitaires tangentes à $\mathscr{F}$ en désintégrant les $\sigma^+ * \omega_p^H$, nous déduisons que les holonomies centre-instable envoient les classes des mesures conditionnelles de μ_H^- dans les variétés stables sur celles des conditionnelles dans les fibres unitaires. Cela entraîne en particulier, par ce qui précède, qu'elles sont simultanément singulières par rapport à la classe harmonique. C'est l'équivalence désirée entre les deux premières assertions.

Reste à prouver celle entre les deux dernières. Nous devrons raisonner exactement comme dans la preuve du lemme 7.1.12 : il faut écrire la section $\sigma^+ : T^1_pB \to T^1\mathscr{F}$ comme le graphe d'une application mesurable $s_p^+ : T_p^1B \to V_p$, et utiliser le lemme de désintégration 1.5.4. □

Pas d'atomes pour les conditionnelles des mesures harmoniques. Nous allons voir que la proposition 7.1.11 est alors conséquence du théorème suivant :

Theorème 7.1.22. *Soit $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté dont la base B est une variété Riemannienne close courbée négativement, et dont la fibre V est une variété différentiable compacte. Supposons que les feuilles soient localement isométriques à la base. Alors en l'absence de mesure invariante par le groupe d'holonomie, toutes les mesures harmoniques pour $\mathscr{F}$ ont des mesures conditionnelles dans les fibres qui sont non atomiques.*

Preuve de la proposition 7.1.11. Nous allons voir que ce théorème nous permet de prouver la proposition 7.1.11 dans le cas particulier de la classe harmonique.

Supposons donc les hypothèses de la proposition 7.1.11 : $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ est un fibré feuilleté au dessus d'une base close courbée négativement, dont les feuilles sont localement isométriques à la base, et qui n'admet pas de mesure transverse invariante par holonomie. Nous voulons prouver que μ_H^+ a une désintégration singulière par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^s, \bar{\lambda}^s_{H,v})$.

Le théorème 4.2.1 nous dit qu'à la mesure de H-Gibbs μ_H^+ est associée une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$ notée m_H. Mieux que cela, nous savons, par la preuve du théorème 7.1.32 (que nous verrons un peu plus loin), que si $m_{H,p}$ désigne la mesure conditionnelle dans la fibre V_p par rapport au volume dans la base, que nous avons :

$$m_{H,p} = s_p^+ * \omega_p^H.$$

Par le théorème 7.1.22, étant donné qu'il n'y a pas de mesure transverse invariante par holonomie, les mesures conditionnelles $m_{H,p}$, qui sont précisément les $s_p^+ * \omega_p^H$, n'ont pas d'atomes. Nous déduisons alors du lemme 7.1.21 que la désintégration de μ_H^+ par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^s, \bar{\lambda}_{H,x}^s)$ est singulière : CQFD. $\square$

Propriété de la moyenne pour les mesures conditionnelles. Il nous reste donc à prouver le théorème 7.1.22. Dans la suite, nous considèrerons un fibré feuilleté $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ au dessus d'une variété Riemannienne close courbée négativement, et dont les feuilles sont localement isométriques à B. Nous considérons une mesure harmonique m pour $\mathscr{F}$.

Nous pouvons choisir une collection finie de petits disques $(U_i)_{i\in I}$ qui trivialisent le fibré, et telle que l'intersection de deux cartes est vide ou connexe. Dans une carte $U_i \times B$, la mesure harmonique m a la désintégration suivante :

$$m_{|U_i\times V} = h_i(p,x), \mathrm{Leb}(p)\, \nu_i(x).$$

Ainsi, par unicité de la désintégration, les mesures conditionnelles dans les fibres V_p, notées m_p, sont identifiées avec $h_i(p,x)\nu_i(x)$, où $p \in U_i$. Il découle en particulier que les mesures conditionnelles de m forme une famille continue de mesures de probabilités sur V (les densités $h(.,x)$ sont lisses avec la première variable).

Avant d'énoncer notre propriété de la moyenne proprement dite, nous avons besoin de quelques notations. Fixons un point $p_0 \in U_{i_0}$, et le revêtement universel $\mathrm{proj}_{p_0} : (N,o) \to (B,p_0)$, où o est un point base fixé dans N. Lorsque $z \in N$, nous notons c_z la projection via proj_{p_0} du segment géodésique $[o,z]$. *Par souci de clarté des notations, nous supposerons que c_z est paramétré par* $[0,1]$. Nous rappelons que lorsque $z \in N$, τ_{c_z} est l'application d'holonomie $V_{p_0} \to V_p$, le long de c_z, où $p = \mathrm{proj}_{p_0}(z)$.

Finalement, nous rappelons que $\beta_o^{S(o,R)}$ désigne le balayage de la masse de Dirac δ_o sur la sphère $S(o,R)$. Nous avons vu que la *propriété de la moyenne* pour les fonctions harmoniques de N s'écrit alors ainsi : pour toute fonction harmonique $H : N \to \mathbb{R}$, et tout $R > 0$, on a $H(o) = \int_{S(o,R)} H\, d\beta_o^{S(o,R)}$. Nous pouvons à présent énoncer notre lemme principal :

Lemme 7.1.23 (Propriété de la moyenne pour les mesures conditionnelles)**.** *Soit $(\Pi, M, B, V, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté au dessus d'une variété Riemannienne close courbée négativement, dont la fibre est compacte, et dont les feuilles sont localement isométriques à la base. Soit m une mesure harmonique pour $\mathscr{F}$, et $(m_p)_{p\in B}$ sa désintégration dans les fibres V_p. Alors pour tout $p_0 \in B$, et tout $R > 0$, on a :*

$$m_{p_0} = \int_{S(o,R)} [\tau_{c_z}^{-1} * m_{c_z(1)}]\, d\beta_o^{S(o,R)}(z).$$

Preuve. Nous avons vu précédemment, qu'il existe un Borélien $A \subset V$ qui est plein pour tous les ν_i, et qui est invariant par toute transformation d'holonomie. Pour $x \in A$, l'application $h_{i_0}(.,x)$ peut être étendue harmoniquement à N par la formule :

$$H_x(z) = \frac{d[\tau_{c_z}^{-1} * \nu_i]}{d\nu_{i_0}}(x)\, h_i(c_z(1), \tau_{c_z}(x)),$$

où $z \in N$, et $c_z(1) \in U_i$ (voir notre lemme 4.3.1).

La propriété de la moyenne implique que pour tout $x \in A$, $H_x(o) = \int_{S(o,R)} H_x(z)\, d\beta_o^{S(o,R)}(z)$. Nous en tirons l'égalité suivante :

$$h_{i_0}(p_0,x) = \int_{S(o,R)} \frac{d[\tau_{c_z}^{-1} * \nu_i]}{d\nu_{i_0}}(x)\, h_i(c_z(1), \tau_{c_z}(x))\, d\beta_o^{S(o,R)}(z).$$

Cette égalité est vraie quel que soit $x \in A$, qui est plein pour ν_{i_0}, nous pouvons alors la multiplier par ν_{i_0}. Puisque d'une part, $h_{i_0}(p_0, x)\nu_{i_0}(x) = m_{p_0}$, et d'autre part, $h_i(c_z(1), \tau_{c_z}(x))[\tau_{c_z}^{-1} * \nu_i](x) = \tau_{c_z}^{-1} * m_{c_z(1)}$, l'égalité énoncée précédemment devient celle énoncée dans le lemme. □

Preuve du théorème 7.1.22. Supposons à présent que les hypothèses du théorème 7.1.22 soient vérifiées : il n'y a pas de mesure transverse invariante. Nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe des mesures conditionnelles avec atomes. Définissons alors l'ensemble Ω des atomes de mesures conditionnelles avec la plus grande masse. L'intersection d'une fibre avec Ω est finie car les mesures conditionnelles sont des mesures de probabilité. Il existe alors $i_0 \in I$, et $p_0 \in U_{i_0}$ tels que $\Omega \cap V_{p_0} \neq \emptyset$: prenons x dans cette intersection. Par la propriété de la moyenne donnée par le lemme 7.1.23, nous avons :

$$m_{p_0}(\{x\}) = \int_{S(o,R)} m_{c_z(1)}(\{\tau_{c_z}(x)\})\, d\beta_o^{S(o,R)}(z).$$

Par définition de Ω, nous avons pour tout $z \in N$, $m_{c_z(1)}(\{\tau_{c_z}(x)\}) \leq m_{p_0}(\{x\})$. Nous trouvons donc, que pour $\beta_o^{S(o,R)}$-presque tout $z \in S(o,R)$, $m_{c_z(1)}(\{\tau_{c_z}(x)\}) = m_{p_0}(\{x\})$. Nous avons mieux. Puisque la courbure sectionnelle de N est pincée entre deux constantes négatives, les mesures $\beta_o^{S(o,R)}$ chargent tous les ouverts de $S(o,R)$. Puisque les mesures conditionnelles varient continûment avec le point de la base, cette dernière égalité a en fait lieu pour tout $z \in S(o,R)$. Cela prouve que pour tout R, et tout $z \in S(o,R)$, $\tau_{c_z}(x) \in \Omega$.

Autrement dit, nous avons prouvé que l'intersection de Ω avec les fibres est un ensemble fini invariant par toute transformation d'holonomie. Cela contredit l'absence de mesure transverse invariance par holonomie. La preuve du théorème 7.1.22 est donc terminée. □

1.7 – Résultats d'unicité

Unicité des mesures de Gibbs. Nous pouvons énoncer notre résultat principal, qui implique en particulier le théorème 8 :

Theorème 7.1.24. *Soit* $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté projectif dont la base B est une variété close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant φ_t de classe C^2. Supposons que les feuilles soient localement isométriques à la base, et notons $\Phi_t : M \to M$ le flot hyperbolique feuileté relevé. Supposons de plus qu'il n'y ait aucune mesure sur $\mathbb{CP}^1$ invariante par l'action du groupe d'holonomie. Alors pour tout potentiel Hölder $F : B \to \mathbb{R}$, il existe une unique mesure de Gibbs pour Φ_t associé au relevé $\overline{F} : M \to \mathbb{R}$. De plus, cette mesure est donnée par μ_F^+.*

Preuve. Nous savons par le corollaire 7.1.7 que μ_F^+ est une mesure de Gibbs associé à $\overline{F}$.

Nous savons également que toute mesure de Gibbs μ pour Φ_t associé à $\overline{F}$ se projette sur μ_F. Puisque toute composante ergodique d'une mesure de Gibbs est encore une mesure de Gibbs (voir le théorème 6.1.2), le théorème 7.1.5 entraîne donc l'alternative suivante. Soit μ_F^- est une mesure de Gibbs associée à $\overline{F}$, ou alors μ_F^+ est la seule.

Par la proposition 7.1.11, le premier choix est exclu puisque la désintégration de μ_F^- est singulière par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^u, \bar{\lambda}_{F,x}^u)$. Ceci nous permet de conclure la preuve du théorème. □

Uniques ergodicités des feuilletages invariants. Nous voulons obtenir l'unicité à constante multiplicative près des familles de mesures $(\nu_T^+)_{T \in \mathscr{T}^+}$, et $(\nu_T^-)_{T \in \mathscr{T}^-}$, où $\mathscr{T}^+$, $\mathscr{T}^-$ sont respectivement les ensembles des sections locales des feuilletages instable et stable, pour lesquelles les relations (7.1.1) et (7.1.2) ont lieu. Par souci de commodité pour le lecteur, nous rappelons ces relations :

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}^u_{T_1\to T_2} * \nu^+_{F,T_1}\right]}{d\nu^+_{F,T_2}}(x) = \exp\left[\int_0^\infty (\overline{F}\circ\Phi_{-t}(\mathrm{hol}^u_{T_2\to T_1}(x)) - \overline{F}\circ\Phi_{-t}(x))\right] = \bar{k}^u_F(x, \mathrm{hol}^u_{T_1\to T_2}(x)). \quad (7.1.3)$$

pour $T_1, T_2 \in \mathscr{T}^+$, et x dans le domaine d'une application d'holonomie $\mathrm{hol}^u_{T_2\to T_1}$.

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}^s_{T_1\to T_2} * \nu^-_{F,T_1}\right]}{d\nu^-_{F,T_2}}(x) = \exp\left[\int_0^\infty (\overline{F}\circ\Phi_{t}(\mathrm{hol}^s_{T_2\to T_1}(x)) - \overline{F}\circ\Phi_{t}(x))\right] = \bar{k}^s_F(x, \mathrm{hol}^s_{T_1\to T_2}(x)). \quad (7.1.4)$$

pour $T_1, T_2 \in \mathscr{T}^-$, et x dans le domaine d'une application d'holonomie $\mathrm{hol}^u_{T_2\to T_1}$.

Nous énonçons à présent notre résultat principal.

Theorème 7.1.25. *Soit $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ un fibré feuilleté projectif dont la base B est une variété close portant un flot d'Anosov topologiquement mélangeant φ_t de classe C^2. Supposons que les feuilles soient localement isométriques à la base, et notons $\Phi_t : M \to M$ le flot hyperbolique feuileté relevé. Supposons de plus qu'il n'y ait aucune mesure sur $\mathbb{CP}^1$ invariante par l'action du groupe d'holonomie. Soit $F : B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Alors, à une constante multiplicative près, il existe deux uniques familles de mesures $(\nu^+_T)_{T\in\mathscr{T}^+}$ et $(\nu^-_T)_{T\in\mathscr{T}^-}$ définies respectivement sur les sections transverses locales à $\mathscr{W}^u$ et $\mathscr{W}^s$ qui satisfont aux relations (7.1.3) et (7.1.4).*

De plus, sur les systèmes complets de transversales locales donnés par $T^{cs}(p) = \Pi^{-1}(W^{cs}_{loc}(p))$ et $T^{cu}(p) = \Pi^{-1}(W^{cu}_{loc}(p))$, elles sont données respectivement par $\nu^{cs}_{F,p} = \sigma^+ * \lambda^{cs}_{F,p}$ et $\nu^{cu}_{F,p} = \sigma^- * \lambda^{cu}_{F,p}$ (voir la proposition 7.1.6).

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons par exemple l'existence d'une autre mesure (i.e. singulière à celle définie par la proposition 7.1.6) notée $(\nu^+_T)_{T\in\mathscr{T}^+}$ existe. Nous considérons alors dans la base B un atlas feuilleté pour $\mathscr{W}^u$, noté $(V_i, \phi_i)_{i\in I}$, avec un système complet de transversales formé de variétés centre-stables locales $(W^{cs}_{loc}(p_i))_{i\in I}$. Supposons de plus que pour $0 \le t \le 1$, les itérées $\varphi_{-t}(V_i)$ forment également un atlas feuilleté pour $\mathscr{W}^u$, et trivialisent le fibré. Alors, si $U_i = \Pi^{-1}(V_i)$ et $T_i = \Pi^{-1}(W^{cs}_{loc}(p_i))$, les $\Phi_{-t}(U_i)$, $0 \le t \le 1$ forment des atlas feuilletés pour $\overline{\mathscr{W}}^u$ associés aux systèmes de transversales $\Phi_{-t}(T_i)$.

Lemme 7.1.26. *Il existe une mesure de probabilité μ sur M qui en restriction à U_i est obtenue par intégration contre $\nu^+_{T_i}$ des mesures $\bar{\psi}^u_{F,x_i}\bar{\lambda}^u_{F,x_i}$ $(x_i \in T_i)$. De plus, μ se projette sur μ_F et est singulière par rapport à μ^+_F.*

Preuve. Définissons une mesure sur chaque U_i comme suggéré dans l'énoncé. Le problème est de voir que ces mesures peuvent être recollées ensemble. Mais puisque les mesures $\nu^+_{T_i}$ satisfont à la condition de cocycle (7.1.3), nous avons par définition de $\bar{\psi}^u_{F,x}$, pour tous i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$:

$$\frac{d[\mathrm{hol}^u_{T_i\to T_j} * \nu^+_{T_i}]}{d\nu^+_{T_j}} = \frac{\bar{\psi}^u_{F,x_j}}{\bar{\psi}^u_{F,x_i}\circ\mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}}.$$

Par conséquent, ces mesures peuvent bien être recollées, et μ est bien définie.

Nous devons maintenant voir que $\Pi * \mu = \mu_F$. Ceci est dû au résultat d'unicité donnée au théorème 2.1.2. En effet, la fibration commute avec les holonomies instables, donc la projection de $(\nu^+_{T_i})_{i\in I}$ sur

B vérifie la relation de cocycle (2.1.4). Nous savons que dans ce cas, la famille est proportionnelle à $(\lambda^{cs}_{|W^{cs}_{loc}(p_i)})_{i\in I}$ (après renormalisation, nous pouvons supposer qu'elles sont égales). Par définition de μ, sa projection sur B est donc localement définie par intégration contre $\lambda^{cs}_{|W^{cs}_{loc}(p_i)}$ des mesures $\psi^u_{F,p_i}\lambda^u_{F,p_i}$. C'est la structure de produit local de μ_F. Nous avons donc ce que nous voulions.

Finalement, puisque les deux mesures μ^+_F et μ induisent par hypothèse sur les transversales à $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$ des mesures singulières, elles sont singulières. La preuve est donc terminée. □

La mesure μ n'est pas a priori invariante par le flot Φ_t. Nous allons voir que pour tout $t\geq 0$, $\Phi_{-t}*\mu$ possède un système de mesures transverses qui satisfont la relation de cocycle (7.1.3), et ont également une désintégration absolument continue par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^u,\bar\lambda^u_{F,x})$, avec des densités uniformément log-bornées. une fois que nous saurons cela, nous ferons la moyenne des itérations négatives de μ par le flot. Nous verrons qu'un point limite est encore singulier par rapport à μ^+_F, et se projette encore sur μ_F : elle doit être égale à μ^-_F. Mais alors, nous déduisons que μ^-_F est ne mesure de Gibbs associée au potentiel $\overline{F}$, contredisant le théorème 7.1.25. Nous avons donc deux lemmes à prouver avant de venir à bout du théorème 7.1.25.

Lemme 7.1.27. *Pour tout $t\geq 0$, il existe une famille de mesures $(\nu^+_{-t,T})_{T\in\mathscr{T}^+}$ définie sur la famille $\mathscr{T}^+$ des transversales locales à $\overline{W}^u$ telle que :*

1. *$(\nu^+_{-t,T})_{T\in\mathscr{T}^+}$ vérifie la relation (7.1.3) pour tout couple $T_1,T_2\in\mathscr{T}^+$;*
2. *$\Phi_{-t}*\mu$ est localement obtenue par intégration contre $\nu^+_{-t,T}$ des mesures $\bar\psi^u_{F,x}\bar\lambda^u_{F,x}$, $x\in T$. En particulier, $\Phi_{-t}*\mu$ a une désintégration absolument continue par rapport à $(\overline{\mathscr{W}}^u,\bar\lambda^u_{F,x})$ avec des densités locales uniformément log-bornées.*

Preuve. Considérons tout d'abord le cas où $t\in[0,1]$. $\Phi_{-t}*\mu$ possède alors une désintégration dans les plaques $\Phi_{-t}(U_i)$ par rapport à $\Phi_{-t}*\nu^+_{T_i}$. Les mesures conditionnelles sont données par $(\bar\psi^u_{F,x_i}\circ\Phi_{-t})(\Phi_{-t}*\bar\lambda^u_{F,x_i})$.

Notons que dans ce cas, la famille de mesures $\Phi_{-t}*\nu^+_{T_i}$ ne satisfait pas à la relation (7.1.3), mais à une relation analogue. Puisque le flot commute avec l'holonomie instable, cette famille vérifie les relations de cocycles suivantes (pour $y_\star\in\Phi_{-t}(T_\star)$, $\star=i,j$ appartenant à la meme variété instable locale) :

$$\frac{d\left[\mathrm{hol}^u_{y_i\to y_j}*(\Phi_{-t}*\nu^+_{T_i})\right]}{d\Phi_{-t}*\nu^+_{T_j}}(y_j)=\exp\left[\int_{-t}^{\infty}(\overline{F}\circ\Phi_{-s}(y_i)-\overline{F}\circ\Phi_{-s}(y_j))ds\right].$$

Nous pouvons alors renormaliser la famille $\Phi_{-t}*\nu^+_{T_i}$ en la multipliant par $\exp\left[\int_0^t(F\circ\Phi_s(y_i)-P(F))ds\right]$, obtenant ainsi une famille de mesures $(\nu^+_{-t,\Phi_{-t}(T_i)})_{i\in I}$ vérifiant la relation (7.1.3). Puisque la fibration Π commute avec les flots, et avec les transformations d'holonomie instable, et μ_F est invariante par φ_t, nous déduisons que $\Phi_{-t}*\mu$ se projette sur μ_F, et que la famille $(\nu^+_{-t,\Phi_{-t}(T_i)})_{i\in I}$ se projette sur $(\lambda^{cs}_{|\varphi_{-t}(W^{cs}_{loc}(p_i))})_{i\in I}$.

Si l'on désintègre la mesure $\Phi_{-t}*\mu$ dans $\Phi_{-t}(U_i)$ par rapport à ν^+_{-t,T_i}, les nouvelles mesures conditionnelles sont obtenues à partir des anciennes en divisant par l'exponentielle ci-dessus. Ce faisant, nous voyons qu'elles sont données par $\bar\psi^u_{F,y_i}\bar\lambda^u_{F,y_i}$ (avec $y_i\in\Phi_{-t}(\overline{U}_i)$). En effet, ce fait vient directement de l'invariance de μ_F par le flot : pour voir que la relation

$$(\bar\psi^u_{F,\Phi_t(y_i)}\circ\Phi_{-t})(\Phi_{-t}*\bar\lambda^u_{F,\Phi_t(y_i)})=\exp\left[\int_0^t(F\circ\Phi_s(y_i)-P(F))ds\right]\bar\psi^u_{F,y_i}\bar\lambda^u_{F,y_i}$$

a lieu, il s'agit d'écrire dans les coordonnées données par la structure de produit local l'invariance de μ_F, et de remarquer que les densités $\bar{\psi}^u_{F,x}$, et les mesures $\bar{\lambda}^u_{F,x}$ sont les relevés de $\psi^u_{F,p}$ et $\lambda^u_{F,p}$ définis dans la base. Si cette relation a lieu en bas, elle aura encore lieu en haut.

Résumons : pour tout $t \in [0,1]$, $\Phi_{-t} * \mu$ est localement obtenu par intégration contre $\nu^+_{-t,\Phi_{-t}(T_i)}$ des mesures $\bar{\psi}^u_{F,x}\bar{\lambda}^u_{F,x}$. Puisque les transversales $(\Phi_{-t}(T_i))_{i\in I}$ forment un système complet de transversales, nous pouvons construire la famille $(\nu_{-t,T})_{T\in\mathcal{T}^+}$ (voir notre lemme 1.3.4). Les densités dans les variétés instables locales sont de plus uniformément log-bornées indépendamment de $t \in [0,1]$.

Nous pouvons à présent raisonner par récurrence sur n et prouver que pour tout $t \in [n, n+1]$, une telle famille de mesure existe. L'hérédité est évidente : une fois qu'on a construit une telle famille de mesures pour n, nous construisons comme précédemment pour tout $t \in [0,1]$ une famille de mesures $\left(\nu^+_{-(n+t),\Phi_{-t}(T_i)}\right)_{i\in I}$ qui convient sur le système de transversales complet $\Phi_{-t}(T_i)$.

Puis par une autre adaptation de notre lemme 1.3.4, nous obtenons la famille de mesures désirée, que nous notons $(\nu_{-(n+t),T})_{T\in T^+}$, achevant ainsi la preuve. □

Lemme 7.1.28. *Les mesures μ_T convergent vers μ^-_F lorsque T tend à l'infini, où :*

$$\mu_T = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi_{-t} * \mu \, dt.$$

Preuve. La mesure μ est singulière par rapport à μ^+_F, et elles se projettent toutes deux sur μ_F. Cela signifie que les mesures conditionnelles dans les fibres sont singulières. Si $(\mu_p)_{p\in B}$ désigne la désintégration de μ dans les fibres, cela entraîne que pour μ_F-presque tout $p \in B$, $\mu_p(\sigma^+(p)) = 0$. Ainsi, pour μ_F-presque tout $p \in B$, et μ_p-presque tout point $x \in V_p$, $1/T\int_0^T \delta_{\Phi_{-t}(x)}\,dt$ converge vers μ^-_F à mesure que T croît indéfiniment (voir la proposition 7.1.5).

Ainsi, cette convergence a lieu pour μ-presque tout $x \in M$. Une application du théorème de convergence dominée nous permet alors de conclure la preuve. □

Fin de la preuve du théorème 7.1.25. Comme nous l'avons expliqué au début de notre argument, les deux lemmes énoncés précédemment mènent tout droit à une contradiction. En effet, par le lemme 7.1.27, les mesures μ_T definies dans le lemme 7.1.28 ont des désintégrations absolument continues par rapport à $(\overline{\mathcal{W}}^u, \bar{\lambda}^u_{F,x})$ avec des densités locales uniformément log-bornées.

Cela entraîne que la mesure limite μ^-_F, possède également une désintégration absolument continue par rapport à ce couple, contredisant ainsi la proposition 7.1.11. Ainsi, le théorème 7.1.25 est prouvé. □.

1.8 – Unicité et description des mesures F-harmoniques

Unicité des mesures F-harmoniques. Nous proposons ici la preuve du théorème suivant :

Theorème 7.1.29. *Soit $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathcal{F})$ un fibré feuilleté projectif au dessus dont la base est une variété close courbée négativement, qui paramètre les feuilles. Supposons de plus qu'il n'y a pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{CP}^1$ qui soit invariante par le groupe d'holonomie. Alors pour tout potentiel Hölder $F : T^1B \to \mathbb{R}$, il existe une unique mesure F-harmonique pour $\mathcal{F}$.*

Preuve. Sous ces hypothèses, le théorème 6.1.10 donne une correspondance bijective entre les mesures F-harmoniques et les mesures de Gibbs associées à $\overline{F}$, et le théorème 7.1.24 donne l'unicité de la mesure de Gibbs pour G_t associée à n'importe quel potentiel. Nous avons donc une preuve du théorème □

Nous aimerions décrire en détail les désintégrations des mesures F-harmoniques. Dans la suite, nous supposerons donc les hypothèses du théorème 7.1.29. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder.

La désintégration des mesures F-harmoniques. Nous nous proposons de décrire les mesures conditionnelles de l'unique mesure F-harmonique pour $\mathscr{F}$. Nous rappelons qu'à multiplication par une constante positivé près, il n'existe qu'une fonction F-harmonique sur la base B, notée h_0.

Dans un premier temps, nous pouvons définir une famille de mesures finies sur les sphères unitaires tangentes $T_z^1 N$, notées ω_z^F, en tirant en arrière ν_z^F par π_z (où $\pi_z : T_z^1 N \to N(\infty)$ est l'identification naturelle).

La section de Lyapunov $\sigma^+ : T^1B \to T^1\mathscr{F}$ peut se relever en une section $\widetilde{\sigma}^+ : T^1N \to T^1N \times \mathbb{CP}^1$ qui est équivariante pour l'action de $\pi_1(B)$. Elle peut être écrite $\widetilde{\sigma}^+(z,v) = (z, v, \widetilde{s}_z^+(v))$, où $\widetilde{s}_z^+ : T_z^1 N \to \mathbb{CP}^1$, satisfait à la relation d'équivariance $\rho(\gamma)\widetilde{s}_z^+ = \widetilde{s}_{\gamma z}^+ D_z\gamma$, où $\gamma \in \pi_1(B)$, $z \in N$. De plus, cette section commute avec le feuilletage centre-instable : lorsque (z_1, v_1) et (z_2, v_2) appartiennent à la même variété centre-instable, $\widetilde{s}_{z_1}^+(v_1) = \widetilde{s}_{z_2}^+(v_2)$.

Il est utile de considérer, dans la preuve du lemme suivant, la section $\widetilde{\sigma}_z^+ : T_z^1 N \to T_z^1 N \times \mathbb{CP}^1$ définie pour $z \in N$ par $(Id, \widetilde{s}_z^+)$

Lemme 7.1.30. *Soit $\widetilde{m}_F^+$ la mesure définie sur $T^1N \times \mathbb{CP}^1$ par intégration des mesures $\widetilde{\sigma}_z^+ * \omega_z^F$ contre* $\mathrm{Leb}(z)$.

1. *$\widetilde{m}_F^+$ est invariante par l'action diagonale de $\pi_1(B)$ sur $T^1N \times \mathbb{CP}^1$*
2. *La mesure quotient est le relevé canonique de l'unique mesure F-harmonique.*

Preuve. Premièrement, notons que pour tout $\gamma \in \pi_1(B)$ et $z \in N$, la relation $D_z\gamma * \omega_z^F = \omega_{\gamma z}^F$ est vérifiée, à cause de la relation d'équivariance $\gamma * \nu_z^F = \nu_{\gamma z}^F$. Deuxièmement, notons que par équivariance de la section $\widetilde{\sigma}^+$, nous avons pour tout z, γ, $(D_z\gamma, \rho(\gamma)) \circ \widetilde{\sigma}_z^+ = \widetilde{\sigma}_{\gamma z}^+ \circ D_z\gamma$.

Puisque $\pi_1(B)$ agit sur N par isométries, nous avons $\gamma * \mathrm{Leb} = \mathrm{Leb}$. L'invariance de $\widetilde{m}_F^+$ par l'action diagonale suit alors.

Pour conclure la preuve du lemme, il suffit de prouver que la mesure quotient est ∞-F-harmonique pour $\overline{\mathscr{W}}^{cu}$. En effet, une telle mesure est unique puisque l'ensemble des mesures ∞-F-harmoniques est en correspondance bijective avec les mesures F-harmoniques (voir la proposition 6.1.19), et par le théorème 7.1.29, il n'y a qu'une mesure F-harmonique.

Notons que $\widetilde{m}_F^+$ est obtenue en poussant par la section $\widetilde{\sigma}^+$ la mesure définie sur T^1N par intégration contre $\mathrm{Leb}(z)$ des mesures ω_z^F. Puisque la section $\widetilde{\sigma}^+$ commute avec les feuilletages centre-instables, il est suffisant de prouver que cette dernière mesure est ∞-F-harmonique pour $\widetilde{\mathscr{W}}^{cu}$.

Pour voir ce dernier point, il est commode de regarder l'expression de cette mesure dans l'identification $T^1N \simeq N \times N(\infty)$ qui trivialise le feuilletage centre-instable. Cette mesure s'écrit dans $N \times N(\infty)$ comme l'intégration contre $\mathrm{Leb}(z)$ des mesures $\nu_z^F = k(o, z; \xi)\nu_o^F(\xi)$: c'est par définition une mesure ∞-F-harmonique. □

Lemme 7.1.31. *Soit $\widetilde{m}_F$ la projection de $\widetilde{m}_F^+$ le long des sphères unitaires tangentes.*

1. *$\widetilde{m}_F$ s'obtient par intégration de $\widetilde{s}_z^+ * \omega_z^F$ contre* $\mathrm{Leb}(z)$.
2. *$\widetilde{m}_F$ est invariante par l'action diagonale, et la mesure quotient sur M est l'unique mesure F-harmonique pour $\mathscr{F}$*

Preuve. L'invariance de $\widetilde{m}_F$ par l'action diagonale de $\pi_1(B)$ sur $N\times\mathbb{CP}^1$ suit directement de celle de $\widetilde{m}_F^+$ par l'action diagonale sur $T^1N\times\mathbb{CP}^1$, et le fait que si $pr : T^1N\to N$ désigne la projection canonique le long des sphères tangentes, nous avons $pr\circ(D\gamma)=\gamma\circ pr$.

Le fait que la mesure quotient, notée m_F, est l'unique mesure F-harmonique vient de la seconde partie du lemme précédent.

Finalement, notons que si $pr_z : T_z^1N\times\mathbb{CP}^1\to\{z\}\times\mathbb{CP}^1$ est la projection sur la seconde variable, on a $\widetilde{s}_z^+=pr_z\circ\widetilde{\sigma}_z^+$, de sorte que $pr_z*[\widetilde{\sigma}_z*\omega_z^F]=\widetilde{s}_z^+*\omega_z^F$: ces mesures sont les mesures conditionnelles de $\widetilde{m}_F$ dans les $\{z\}\times\mathbb{CP}^1$. La preuve du lemme est donc achevée. □

Theorème 7.1.32. *Soit $(\Pi,M,B,\mathbb{CP}^1,\mathscr{F})$ un fibré feuilleté projectif au dessus dont la base est une variété close courbée négativement, qui paramètre les feuilles. Supposons de plus qu'il n'y ait pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{CP}^1$ qui soit invariante par le groupe d'holonomie. Soit $F : T^1B\to\mathbb{R}$ un potentiel Hölder, appelons m_F l'unique mesure F-harmonique. Alors :*

1. *m_F se projette sur $h_0\,$Leb ;*
2. *les mesures conditionnelles de m_F dans les fibres, par rapport à $h_0\,$Leb, sont données pour tout p par :*
$$m_{F,p}=s_p^+*\left[\frac{\omega_p^F}{\mathrm{mass}(\omega_p^F)}\right];$$

Preuve. L'unique mesure F-harmonique m_F est le quotient de $\widetilde{m}_F$. Si $p\in B$, nous pouvons définir $s_p^+ : T_p^1B\to V_p\simeq\mathbb{CP}^1$, ainsi que ω_p^F. Par conséquent, nous avons la désintégration $m_F=[s_p^+*\omega_p^F]\,\mathrm{Leb}(p)$.

Pour finir, nous rappelons que nous avons défini la fonction F-harmonique par $h_0(p)=\mathrm{mass}(\omega_p^F)$ sur B. Les mesures $s_p^+*\omega_p^F/h_0(p)$ sont des mesures de probabilités, donc $\Pi*m_F=h_0\mathrm{Leb}$, et :
$$m_F=s_p^+*\left[\frac{\omega_p^F}{\mathrm{mass}(\omega_p^F)}\right]h_0(p)\mathrm{Leb}(p).$$
CQFD. □

2 | Limites de grandes boules

Afin d'obtenir des mesures transverses quasi-invariantes par holonomie, il est assez classique de regarder des moyennes pondérées par des cocycles sur les grandes boules dans les feuilles : voir [GPl] pour le travail de Goodman et Plante, et [Sc, AR] pour des généralisations dans l'esprit de cette thèse. La différence principale est que nous n'utiliserons pas de propriété de Følner. Dans notre cas, puisque les feuilles sont courbées négativement, la croissance du volume des boules dans le revêtement universel des feuilles est exponentielle : les effets de bord ne peuvent plus être négligés. L'idée, déjà présente dans [BG] dans le contexte où la base est une surface hyperbolique, est de dire que les grandes sphères ressemblent à des horosphères, et d'utiliser les propriétés des feuilletages horosphériques. Nous renvoyons également au travail de Knieper [Kn] où l'unique mesure totalement invariante pour le feuilletage horosphérique est obtenu comme limite de moyenne sphériques.

2.1 – Moyennes pondérées de grandes boules

Dans ce qui suit, $(\Pi,M,B,\mathbb{CP}^1,\mathscr{F})$ est un fibré feuilleté, dont la base B est une variété Riemannienne close courbée négativement, et dont les feuilles sont localement isométriques à B. Nous noterons N le revêtement universel Riemannien de B, et nous fixerons un point base $o\in N$. Pour $x\in M$,

$\mathrm{proj}_x : (N, o) \to (L_x, x)$ désignera le revêtement universel Riemannien de la feuille correspondante qui envoie o sur x.

Limites de grandes boules. Une conséquence typique du résultat principal de la section est la généralisation suivante d'un résultat de Bonatti et Gómez-Mont (voir [BG]). Nous nous intéressons à la famille suivante de mesures, définie sur M par :

$$\mu_{x,R} = \mathrm{proj}_x * \left(\frac{\mathrm{Leb}_{|B(o,R)}}{\mathrm{Leb}(B(o,R))}\right).$$

Notons que ces mesures sont des analogues multidimensionnelles des moyennes de Birkhoff (dans ce cas, le revêtement Riemannien est donné par $\mathbb{R}$, et la projection est donnée par le paramétrage des lignes de flots). Le résultat suivant est conséquence directe du théorème principal de cette partie.

Theorème 7.2.1. *Soit $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1)$ un fibré projectif feuilleté, dont la base est une variété Riemannienne close courbée négativement, et dont les feuilles sont localement isométriques à B. Supposons qu'il n'y ait pas de mesure sur la fibre invariante par le groupe d'holonomie. Alors, il existe une unique mesure m sur M telle que pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$, et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant à l'infini, les suites de mesures μ_{x_n,R_n} convergent vers m. De plus, cette mesure est l'unique mesure 0-harmonique (où 0 est la fonction identiquement nulle).*

Un poids sur les grandes sphères. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder, et $\widetilde{F} : T^1N \to \mathbb{R}$ son relevé. Lorsqu'il n'y a pas de mesure sur $\mathbb{CP}^1$ invariante par le groupe d'holonomie, nous voulons approcher l'unique mesure F-harmonique par des moyennes pondérées sur les grandes boules. Les mesures F-harmoniques sont associées au noyau k^F que nous avons construit par exponentiation de la différence des intégrales du potentiel entre un point ξ à l'infini et deux points de N. Le meilleur moyen d'approcher ce cocycle par des fonctions définies sur des boules dans les feuilles est, étant donnés deux points de la boule, d'intégrer le potentiel le long des géodésiques dirigées du centre vers les points, de les exponentier, de les quotienter, puis d'envoyer le centre à l'infini en suivant une géodésique. Nous considèrerons donc la fonction définie sur $N \times N$ par la formule suivante :

$$\kappa^F(z_0, z) = \exp\left[\int_{z_0}^{z} \widetilde{F}\right]. \tag{7.2.5}$$

Nous aurons besoin d'estimées de distorsion, et de prouver que le quotient $\kappa^F(z_0, y)/\kappa^F(z_0, z)$ converge uniformément vers le cocycle $\delta^F(z, y; \xi)$ lorsque z_0 converge non-tangentiellement vers ξ dans la topologie conique. Nous donnons sans preuve un théorème, qui est une généralisation d'un théorème de Margulis, et est dû à Ledrappier [L4], sous une forme légèrement plus générale.

Theorème 7.2.2. *Pour tout $z_0 \in N$, il y a un nombre $c(z_0)$, tel que :*

$$\int_{S(z_0,R)} \kappa^F(z_0, z)\, d\mathrm{Leb}(z) \sim c(z_0) e^{RP(F)},$$

lorsque R croît indéfiniment.

Considérons alors sur M les moyennes pondérées de grandes boules :

$$\mu^F_{x,R} = \mathrm{proj}_x * \left(\frac{\kappa^F(o, y)\mathrm{Leb}_{|B(o,R)}(y)}{\int_{B(o,R)} \kappa^F(o, y)\, d\mathrm{Leb}(y)}\right). \tag{7.2.6}$$

Le but de cette section est de prouver le résultat suivant :

Theorème 7.2.3. *Soit* $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté projectif au dessus d'une variété Riemannienne close et courbée négativement, qui paramètre les feuilles. Supposons de plus qu'il n'y ait pas de mesure sur* $\mathbb{CP}^1$ *invariante par le groupe d'holonomie. Soit* $F : T^1B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder* ***dont la pression est positive****. Alors, pour toutes suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ *et* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendant vers l'infini, la suite de mesures* $\mu^F_{x_n,R_n}$ *converge vers l'unique mesure* F*-harmonique pour* $\mathscr{F}$*.*

Convergence des moyennes sphériques pondérées. Nous regarderons dans un premier temps les *moyennes sphériques pondérées*, qui sont des mesures de probabilités définies sur M par :

$$m^F_{x,R} = \mathrm{proj}_x * \left(\frac{\kappa^F(o,y)\mathrm{Leb}_{|S(o,R)}(y)}{\int_{S(o,R)} \kappa^F(o,y)d\mathrm{Leb}(y)} \right). \tag{7.2.7}$$

Le but est ici de prouver le théorème suivant :

Theorème 7.2.4. *Soit* $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté projectif au dessus d'une variété Riemannienne close et courbée négativement, qui paramètre les feuilles. Supposons de plus qu'il n'y a pas de mesure sur* $\mathbb{CP}^1$ *invariante par le groupe d'holonomie. Soit* $F : T^1B \to \mathbb{R}$ *un potentiel Hölder. Alors pour toutes suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ *et* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendant vers l'infini, la suite de mesures* $m^F_{x_n,R_n}$ *définie ci-dessus converge vers l'unique mesure* F*-harmonique.*

Preuve du théorème 7.2.3 à partir de 7.2.4. Tout d'abord, par le théorème de Ledrappier, 7.2.2, l'intégrale $\int_{S(o,R)} \kappa^F(o,y)d\mathrm{Leb}(y)$ se comporte comme $e^{RP(F)}$: en particulier, elle croît à l'infini uniquement lorsque $P(F) > 0$ (c'était le cas de l'exemple particulier 7.2.1, où le potentiel est la fonction nulle, dont la pression est égale à l'entropie topologique du flot géodésique g_t).

Nous empruntons l'argument suivant à Bonatti et Gómez-Mont [BG]. Supposons qu'il n'existe aucune mesure sur $\mathbb{CP}^1$ qui soit invariante par le groupe d'holonomie. Par le théorème 7.2.4, les moyennes sphériques pondérées convergent vers l'unique mesure F-harmonique pour $\mathscr{F}$. Considérons alors la couronne $C_R = B(o,R) \setminus B(o,R/2)$. Puisque la pression de F est positive, l'intégrale du poids sur C_R se rapproche de plus en plus de celle sur $B(o,R)$. Ainsi, il est suffisant de prouver que la restriction normalisée de $\mu^F_{x,R}$ sur la projection de C_R approche l'unique mesure F-harmonique.

Mais cette mesure s'écrit comme barycentre de moyennes sphériques pondérées, chacune d'elle tendant vers l'unique mesure F-harmonique (par le théorème 7.2.4). Nous concluons que le barycentre converge vers la même mesure : CQFD. □.

Nous allons maintenant montrer comment prouver le théorème 7.2.4. L'idée est simple et repose sur le fait que les grandes sphères ressemblent à des horosphères. Il est possible de remonter les moyennes sphériques au fibré unitaire tangent, car les sphères de même rayons peuvent y être plongées en ajoutant le champ de vecteurs radial sortant. Ces sphères plongées forment un feuilletage qui converge uniformément vers le feuilletage instable du flot géodésique. De plus, les mesures relevées induisent sur les transversales de ces feuilletages des familles de mesures telles que les cocycles de Radon-Nikodym qui leur sont associés convergent vers le noyau k^F. Finalement, en utilisant le théorème d'unique ergodicité 7.1.25, nous déduisons que l'unique point limite de cette famille est le relevé canonique de l'unique mesure F-harmonique. Ainsi cette mesure se projette sur l'unique mesure F-harmonique, concluant ainsi la preuve du théorème.

2.2 – Feuilletage horosphérique en tant que limite

Horosphères et grandes sphères. Pour $z \in N$, et $R > 0$, la sphère $S(z,R) = \{y \in N | \mathrm{dist}_{\mathscr{F}}(z,y) = R\}$ se plonge dans T^1N en attachant le champ de vecteur radial sortant. Nous noterons cette sphère plongée $S^+(z,R)$. Notons qu'elle est obtenue en poussant la fibre unitaire tangente T^1_zN le long du flot géodésique sur une distance R : ces sphères forment un feuilletage de T^1N noté $\widetilde{\mathcal{W}}^+_R$, qui est obtenu en poussant le feuilletage $\widetilde{\mathcal{W}}^+$ défini par les feibres unitaires tangentes le long du flot sur une distance R. Par conséquent, pour tous $R, t > 0$,

$$G_t(\widetilde{\mathcal{W}}^+_R) = \widetilde{\mathcal{W}}^+_{R+t}.$$

Le lemme d'inclinaison (ou λ-lemma) classique pour les ensembles hyperboliques (voir le chapitre 9 de [Sh]) ainsi que la remarque faite ci-dessus, entraînent que, si $\mathcal{W}^+_R$ désigne la projection de $\widetilde{\mathcal{W}}^+_R$ sur T^1B, $\mathcal{W}^+_R$ converge vers le feuilletage instable $\mathcal{W}^u$ dans la topologie C^0 des champs de plans (la convergence est uniforme grâce à la compacité de T^1B). Cela implique que la structure Riemanienne induite sur les feuilles de $\mathcal{W}^+_R$ converge uniformément vers celle de $\mathcal{W}^u$. Cela implique également la proposition suivante :

Proposition 7.2.5. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre positif R_0 ainsi qu'une famille finie de petits disques plongés disjoints $T_i \subset T^1B$, $i \in I$ tels que pour tout $R > R_0$:*

1. *$(T_i)_{i\in I}$ est un système complet de transversales à la fois pour $\mathcal{W}^u$ et pour $\mathcal{W}^+_R$;*
2. *pour toute transformation d'holonomie $\mathrm{hol}^u_{S_i\to S_j} : S_i \to S_j$ le long d'un chemin de $W^u(v)$ de longueur ≤ 1, où $S_i \subset T_i$, et $S_j \subset T_j$ sont des ouverts relativement compacts avec $v \in S_i$, il existe des ouverts $S'_i \subset S_i$, $S'_j \subset S_j$ avec $v \in S_i$, un chemin c dans $W^+_R(v)$ de longueur < 2, et une transformation d'holonomie pour $\mathcal{W}^+_R$ le long de c, $\tau_{R,c} : S'_i \to S'_j$ qui est ε-proche dans la topologie C^0 de la restriction à S'_i de $\mathrm{hol}^u_{S_i\to S_j}$.*

Nous pouvons relever les feuilletages $\mathcal{W}^+_R$ aux feuilles de $\widehat{\mathcal{F}}$ obtenant ainsi des sous-feuilletages que nous notons $\overline{\mathcal{W}}^+_R$. Ils convergent vers $\overline{\mathcal{W}}^u$ dans la topologie des champs de plans : la proposition précédent est alors également vraie dans ce contexte.

Une estimée géométrique. Nous aurons besoin de l'estimée géométrique suivant, que l'on prouve en utilisant les inégalités CAT :

Lemme 7.2.6. *Il existe des constantes $C > 0$ and $\alpha > 0$, telles que pour tout $o \in N$, $R > 0$, et $x, y \in S(o,R)$, nous ayons :*

$$\frac{\kappa^F(o,y)}{\kappa^F(o,z)} \leq \exp\left(C\mathrm{dist}_{S(o,R)}(y,z)^\alpha\right),$$

où $\mathrm{dist}_{S(o,R)}$ désigne la fonction distance venant de la structure Riemannienne induite sur $S(o,R)$.

Preuve. Écrivons d'abord la formule :

$$\frac{\kappa^F(o,y)}{\kappa^F(o,x)} = \exp\left[\int_o^y \widetilde{F} - \int_o^x \widetilde{F}\right]. \tag{7.2.8}$$

La preuve de ce lemme repose sur un théorème de comparaison. La preuve de ce lemme repose sur un théorème de comparaison.

Soit $o \in N$, $R > 0$, et $x, y \in S(o,R)$. Les segments géodésiques $[o,x]$ et $[o,y]$ sont paramétrés par longueur d'arc : nous appelons $x(r)$ et $y(r)$ ce paramétrage. Notons $c(r)$ la géodésique minimisante dans $S(o,r)$ entre $x(r)$ et $y(r)$, ainsi que $l(r)$ sa longueur. L'affirmation suivante est le point clé de la preuve.

Affirmation. *Nous avons pour tout $r \leq R$,*

$$\frac{l(r)}{l(R)} \leq \frac{\sinh(ar)}{\sinh(aR)}.$$

Nous prouvons dans un premier temps que cette affirmation suffit à conclure la preuve du lemme. Considérons les vecteurs unitaires v_{ox} et v_{oy} basés respectivement en x et y, qui sont orthogonaux à la sphère, et pointent vers l'extérieur. Le transport, pour la connexion induite, du champ de vecteur orthogonal sortant étant parallèle le long de $c(R)$, la distance entre ces deux vecteurs est égale à la longueur $l(R)$ (cet argument marche de la même façon pour tout $r \leq R$). Nous déduisons de ceci, et du caractère Hölder de F, que :

$$\left|\int_o^y \widetilde{F} - \int_o^x \widetilde{F}\right| \leq C\int_0^R l(r)^\alpha dr \leq Cl(R)^\alpha \int_0^R \frac{\sinh^\alpha(ar)}{\sinh^\alpha(aR)}dr,$$

la dernière inégalité venant de l'affirmation. La dernière intégrale est évidemment bornée indépendamment de R. Nous coucluons alors en prenant les exponentielles.

Prouvons à présent notre affirmation. Nous allons appliquer l'inégalité CAT$(-a^2)$ au triangle dont les côtés sont donnés par $[o,x]$, $[o,y]$, et la courbe $c(R)$: ce triangle n'est pas géodésique. Nous obtenons alors que pour le triangle dans l'espace N_{-a^2} simplement connexe de courbure $-a^2$ dont les côtés sont donnés par deux segments géodésiques (parametrés par longueur d'arc) $x_0(r)$, et $y_0(r)$ $(x_0(0) = y_0(0))$, avec $0 \leq r \leq R$, et un chemin géodésique $c_0(R)$ tangent à une sphère hyperbolique de centre $x_0(0)$ qui lie $x_0(R)$ et $y_0(R)$, et avec une longueur $l_0(R) = l(R)$ alors

$$l(r) \leq l_0(r),$$

pour tout $r \leq R$, où $l_0(r)$ est la longueur de la courbe géodésique $c_0(r)$ tangente à la sphère reliant $x_0(r)$ et $y_0(r)$.

L'inégalité CAT$(-a^2)$ usuelle est valide pour les triangles géodésiques (voir [BH]), mais il est facile d'en déduire la version ci-dessus. Pour ce faire, prenons une division très fine du chemin $c(R)$ par des points x_k tels que $l(R) \simeq \sum \mathrm{dist}(x_k, x_{k+1})$ (c'est-à-dire approchons $c(R)$ par une géodésique brisée), et appliquons le théorème usuel à chaque triangle géodésique dont les sommets sont o, x_k, x_{k+1}.

Un calcul de géométrie hyperbolique nous donne que la longueur de l'arc de cercle $c_0(r)$ est égal à $\theta\sinh(r)$, où θ est l'angle $\widehat{x_0(r)x_0(0)y_0(r)}$, nous en déduisons donc que $l_0(r)/l_0(R) = \sinh(ar)/\sinh(aR)$. □

Convergence uniforme vers le cocycle. Nous prouvons à présent que le quotient des poids converge vers le cocycle δ^F qui est défini par la formule (6.1.5), et que cette convergence est uniforme sur les espaces compacts.

Lemme 7.2.7. *Soit $K \subset N$ un ensemble compact, et $\xi \in N(\infty)$. Alors :*

$$\lim_{o\to\xi} \frac{\kappa^F(o,y)}{\kappa^F(o,z)} = \delta^F(z,y;\xi),$$

uniformément avec $y, z \in K$, lorsque o converge non-tangentiellement vers ξ dans la topologie conique.

Preuve. Rappelons dans un premier temps les relations (7.2.8), et (6.1.5) :

$$\frac{\kappa^F(o,z_2)}{\kappa^F(o,z_1)} = \exp\left[\int_o^{z_2}\widetilde{F} - \int_o^{z_1}\widetilde{F}\right] \quad \text{et} \quad \delta^F(z_1,z_2;\xi) = \exp\left[\int_\xi^{z_2}\widetilde{F} - \int_\xi^{z_1}\widetilde{F}\right].$$

Soit $\xi \in N(\infty)$, et $K \subset N$ compact. Par définition de la convergence non-tangentielle, il suffit de supposer que o converge vers ξ tout en restant sur un rayon géodésique c avec ξ comme point extrémal.

Par compacité de K, il existe des constantes $A_1 > 0$ et $\eta_1 < 1$ telles que pour tout $y \in K$, et $T > 0$, si $y(T)$ désigne le point du rayon géodésique $[y, \xi)$ avec $\operatorname{dist}(y, y(T)) = \operatorname{dist}(y, c(T))$,

$$\left| \int_{c(T)}^{y} \widetilde{F} - \int_{y(T)}^{y} \widetilde{F} \right| \leq A_1 \eta_1^T.$$

Cela est dû au lemme de distorsion 7.2.6 appliqué à la fonction Hölder $F \circ \iota$ (où ι est l'involution qui envoie un vecteur unitaire v tangent à N sur $-v$), et le fait que $c(T)$ et $y(T)$ deviennent proches exponentiellement vite (les rayons géodésiques $[y, \xi)$ et c sont asymptotiques).

Le lemme de distorsion usuel (voir la preuve du lemme 6.1.5) montre l'existence de $A_2 > 0$ et $\eta_2 < 1$ tels que pour tout $y \in K$,

$$\left| \int_{\xi}^{c(T)} \widetilde{F} - \int_{\xi}^{y(T)} \widetilde{F} \right| \leq A_2 \eta_2^T.$$

La preuve est achevée lorsque l'on remarque que l'intégrale

$$\left(\int_{c(T)}^{y} \widetilde{F} - \int_{c(T)}^{z} \widetilde{F} \right) - \left(\int_{\xi}^{y} \widetilde{F} - \int_{\xi}^{z} \widetilde{F} \right)$$

peut être décomposée en quatre morceaux :

$$\left(\int_{c(T)}^{y} \widetilde{F} - \int_{y(T)}^{y} \widetilde{F} \right) + \left(\int_{\xi}^{c(T)} \widetilde{F} - \int_{\xi}^{y(T)} \widetilde{F} \right) + \left(\int_{\xi}^{z(T)} \widetilde{F} - \int_{\xi}^{c(T)} \widetilde{F} \right) + \left(\int_{z(T)}^{z} \widetilde{F} - \int_{c(T)}^{z} \widetilde{F} \right),$$

chacun d'eux tendant vers zéro exponentiellement vite independamment des choix de $y, z \in K$.

Nous concluons la preuve en prenant les exponentielles. □

2.3 – Preuve du théorème 7.2.4

Rappelons les hypothèses et les notations. $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ est un fibré feuilleté projectif, dont la base B est une variété Riemannienne close courbée négativement, et dont les feuilles sont localement isométriques à B. Le revêtement universel Riemannien de la base est noté par N, et nous avons fixé un point base $o \in N$. Pour $x \in M$, $\operatorname{proj}_x : (N, o) \to (L_x, x)$ représente le revêtement universel Riemannien de la feuille correspondante qui envoie o sur x.

Relevé au fibré unitaire tangent. Les mesures $m_{x,R}^F$ peuvent clairement être remontées à $T^1\mathscr{F}$ en poussant par le plongement naturel $S(x,R) \to S^+(x,R)$ (rappelons que $S^+(x,R)$ désiigne l'image de $T_x^1\mathscr{F}$ par G_R). Nous noterons $m_{x,R}^{F,+}$ la mesure ainsi obtenue.

Puisque le feuilletage $\overline{\mathscr{W}}_R^+$ converge uniformément vers $\overline{\mathscr{W}}^u$ lorsque R tend vers l'infini (voir la proposition 7.2.5), nous pouvons trouver $R_0 > 0$ et un atlas feuilleté $\mathscr{A} = (U_i, \phi_i)_{i \in I}$ pour le feuilletage instable $\overline{\mathscr{W}}^u$, tel qu'il existe un atlas feuilleté pour $\overline{\mathscr{W}}_R^+$ de la forme $\mathscr{A}_R = (U_i, \phi_{R,i})_{i \in I}$ et ce pour tout $R > R_0$. Nous considérons un système complet de transversales $(T_i)_{i \in I}$, et notons $(P_i(w))_{w \in T_i}$ les plaques instables. Nous allons prouver la proposition suivante.

Proposition 7.2.8. *Soit m^+ un point d'accumulation de la famille $m_{x,R}^{F,+}$. Sa restriction à une carte U_i a une désintégration dans les plaques instables est de la forme $[H_i \operatorname{Leb}_{|P_i(w)}^u]\, \nu_i^+(w)$, où :*

1. *H_i est une fonction mesurable positive qui est uniformément log-bornée, et qui vérifie la relation suivante pour v, w dans la même plaque P_i :*
$$\frac{H_i(v)}{H_i(w)} = k^F(w, v; \xi), \tag{7.2.9}$$
où $\xi \in N(\infty)$ est la limite commune des itérations négatives de la variété instable de v et w.
2. *$(\nu_i^+)_{i\in I}$ est une famille de mesures finies définie sur la famille $(T_i)_{i\in I}$ qui vérifie :*
$$\frac{d[\mathrm{hol}^u_{T_i\to T_j} * \nu_i^+]}{d\nu_j^+}(v) = k^F(v, \mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}(v); \xi), \tag{7.2.10}$$
où v appartient au domaine d'holonomie $\mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}$, et ξ est la limite commune des itérations de la variété instale de v.

Remarque 1. La notation est quelque peu abusive puisque v, w appartiennent à T^1P_i, et k^F a été défini sur $N \times N \times N(\infty)$: nous devons en fait évaluer k^F sur les relevés à une même horosphère du revêtement universel des points base de v et w, et sur le centre de l'horosphère.

Remarque 2. Les deux propriétés sont équivalentes dans le sens que s'il est possible de recoller les mesures $[H_i(\mathrm{Leb}^u_{|W^u_{loc}(w)}]\,\nu_i^+(w)$ en une mesure de $T^1\mathscr{F}$, alors si l'une des propriétés a lieu, l'autre aussi.

Preuve du théorème 7.2.4 à partir de la proposition 7.2.8. Supposons qu'aucune mesure de probabilité de $\mathbb{CP}^1$ ne soit invariante par l'action du groupe d'holonomie de $\mathscr{F}$. Supposons de plus que la proposition précédente soit vraie, et considérons un point d'accumulation m^+. Dans ce cas, la famille ν_i^+ satisfait la relation de cocycle (7.1.1), et par la propriété d'unique ergodicité du feuilletage instable (le théorème 7.1.25), elle est uniquement déterminée (à multiplication près par une constante positive). Alors, m^+ est le relevé canonique de l'unique mesure F-harmonique (voir le théorème 7.1.29) : ainsi, sa projection sur M est l'unique mesure F-harmonique. Cela nous permet de conclure la preuve du théorème 7.2.4. Par conséquent, pour conclure la preuve du théorème, nous n'avons plus qu'à prouver la proposition 7.2.8. □

2.4 – Preuve de la proposition 7.2.8.

Soit m^+ un point d'accumulation de $m^{F,+}_{x,R}$. Choisissons des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$, et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini, telles que $m^{F,+}_{x_n,R_n}$ converge vers m^+. Rappelons que nous avons un atlas feuilleté $\mathscr{A} = (U_i, \phi_i)_{i\in I}$ pour le feuilletage instable $\overline{\mathscr{W}}^u$, ainsi qu'un nombre $R_0 > 0$ tel que quand $R > R_0$, $\mathscr{A}_R = (U_i, \phi_{R,i})_{i\in I}$ est un atlas feuilleté pour $\overline{\mathscr{W}}^+_R$. Nous pouvons raffiner l'atlas $\mathscr{A}$ de telle sorte que $m^+(\partial U_i) = 0$ pour tout $i \in I$ (ainsi, nous avons toujours $\lim_{n\to\infty} m^{F,+}_{x_n,R_n}(U_i) = m^+(U_i)$). Nous choisissons un système complet de transversales correspondant noté $(T_i)_{i\in I}$: les plaques instables sont notées $(P_i(v))_{v\in T_i}$, et celles du feuilletage $\overline{\mathscr{W}}^+_{R_n}$ sont notées $(P_{i,n}(v))_{v\in T_i}$. Soit $i \in I$ tel que $m^+(U_i) > 0$.

Lemme 7.2.9. *La projection sur la transversale T_i de la restriction de $m^{F,+}_{x_n,R_n}$ à U_i est équivalente à la mesure :*
$$\nu^+_{i,n} = \frac{1}{\int_{S(o,R_n)} \kappa^F(o,y)\,d\mathrm{Leb}(y)} \sum_{v\in T_i\cap S^+(x_n,R_n)} \kappa^F(x_n, v)\delta_v$$
avec une dérivée de Radon-Nikodym log-bornée indépendamment de n.

Remarque 3. Ici encore, La notation est abusive. Nous devons relever $v \in T_i$ et x_n au revêtement universel, et évaluer κ^F sur les relevés de x_n et du point base de v. Si nous imposons que le point base reste dans un domaine fondamental donné, tout se passe comme si x_n tendait à l'infini dans le passé tout en restant sur la géodésique dirigée par v.

Preuve. La projection de $(m^{F,+}_{x_n,R_n})_{|U_i}$ sur T_i est donnée par la mesure de comptage suivante :

$$\frac{1}{\int_{S(o,R_n)} \kappa^F(o,y)d\mathrm{Leb}(y)} \sum_{v \in T_i \cap S^+(x_n,R_n)} m^{F,+}_{x_n,R_n}(P_{i,n}(v))\delta_v.$$

Soit Δ une borne supérieure des diamètres des plaques de $\overline{\mathscr{W}}^+_{R_n}$, et $K^{\pm 1}$ des nombres qui respectivement majorent et minorent bornent leurs volumes. En utilisant le lemme de distorsion 7.2.6, nous voyons que pour tout $v \in T_i \cap S^+(x_n,R_n)$, $m^{F,+}_{x_n,R_n}(P_{i,n}(v)) \in [C_0^{-1}, C_0]\kappa^F(x_n,v)$, où $C_0 = Ke^{C\Delta^\alpha}$.

Bien sûr, Δ et V peuvent être choisis indépendants de n puisque le feuilletage $\overline{\mathscr{W}}^+_R$ converge uniformément vers $\overline{\mathscr{W}}^u$: en particulier on peut déduires des bornes sur les diamètres et volumes des plaques de $\mathscr{W}^u$ des bornes pour celles de $\mathscr{W}^+_{R_n}$, au moins pour n assez grand. Le lemme est ainsi prouvé. □

Lemme 7.2.10. *La restriction de $m^{F,+}_{x_n,R_n}$ à une carte U_i a une désintégration dans les plaques instables de la forme $[H_{i,n}\mathrm{Leb}_{|P_{i,n}(w)}]\,\nu^+_{i,n}(w)$, où :*

1. *$H_{i,n}$ est une fonction positive et mesurable qui est log-bornée indépendamment de n, et qui vérifie la formule suivante pour v, w dans la même plaque $P_{i,n}$:*
$$\frac{H_{i,n}(v)}{H_{i,n}(w)} = \frac{\kappa^F(x_n,v)}{\kappa^F(x_n,w)}, \tag{7.2.11}$$
où v et w sont orthogonaux à la sphère centrée en z_0 et de rayon R.
2. *$(\nu^+_{i,n})_{i\in I}$ est la famille de mesures fiines définies sur les transversales $(T_i)_{i\in I}$ dans le lemme 7.2.9. Elles vérifient :*
$$\frac{d[\tau_{ij,n} * \nu^+_{i,n}]}{d\nu^+_{j,n}}(v) = \frac{\kappa^F(x_n,\tau_{ji,n}(v))}{\kappa^F(x_n,v)}, \tag{7.2.12}$$
où $\tau_{ij,n}$ est une transformation d'holonomie $W^+_{x_n,R_n}$ dont le domaine est un ouvert de T_i, et son but, un ouvert de T_j, et où v appartient au domaine de $\tau_{ji,n}$.

Preuve. Puisque par définition, $m^{F,+}_{x_n,R_n}$ a une désintégration de Lebesgue dans les feuilles de $\overline{\mathscr{W}}^+_{R_n}$, la désintégration de $(m^{F,+}_{x_n,R_n})_{|U_i}$ par rapport à $\nu^+_{i,n}$ est comme énoncé dans le lemme. Nous devons voir que les densités $H_{i,n}$ ainsi que les mesures $\nu_{i,n}$ vérifient les propriétés désirées.

La seconde propriété est immédiate par définition de $(\nu^+_{i,n})_{i\in I}$: voir le lemme 7.2.9.

Le fait que les densités $H_{i,n}$ soient log-bornées indépendamment de n vient de ce que $\nu^+_{i,n}$ est équivalente à la projection sur T_i de $(m^{F,+}_{x_n,R_n})_{|U_i}$ avec des dérivées de Radon-Nikodym qui sont log-bornées indépendamment de n (voir de nouveau le lemme 7.2.9). Que les densités vérifient les relations désirées, découle directement de ce que c'est le cas de la famille $(\nu^+_{i,n})_{i\in I}$ et de ce que les mesures obtenues sur U_i se recollent bien (voir la remarque 2 ci-dessus). La preuve est alors finie. □

Fin de la preuve de la proposition 7.2.8. Par le choix des cartes U_i, nous savons que $(m^{F,+}_{x_n,R_n})_{|U_i}$ converge vers la mesure $m^+_{|U_i}$ lorsque n tend vers l'infini. Nous voulons en déduire que m^+ se désintègre dans les plaques P_i comme énoncé dans la proposition. Prenons deux cartes U_i et U_j qui s'intersectent. Nous pouvons toujours supposer que lorsque v appartient au domaine de la transformation d'holonomie $\mathrm{hol}^u_{T_i\to T_j}$, nous avons $\mathrm{dist}_u(v, \mathrm{hol}^u_{T_i\to T_j}(v)) \leq 1$.

Nous pouvons supposer, en extrayant si nécessaire, que $\nu^+_{n,i}$ converge vers une mesure finie ν^+_i sur T_i. Par la proposition 7.2.5 nous savons que pour tout v appartenant au domaine de $\mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}$, il existe un ouvert $S_j \subset T_j$ contenant v, tel que la restriction de $\mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}$ à S_i soit une limite uniforme d'applications d'holonomies $\tau_{ij,n}$. D'après le lemme 7.2.7, nous avons pour tout $v \in S_j$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\kappa^F(x_n, \tau_{ji,n}(v))}{\kappa^F(x_n, v)} = \delta^F(v, \mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}(v); \xi) = k^F(v, \mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}(v); \xi),$$

où $\xi \in N(\infty)$ est la limite commune des itérations négatives par le flot des éléments de $W^u(v)$. Cette égalité est valide car v et $\mathrm{hol}^u_{T_j\to T_i}(v)$ sont sur la même horosphère centrée en ξ : la fonction de Busemann correspondante s'annule donc. Ainsi donc, puisque par le lemme 7.2.10, les mesures $\nu^+_{n,i}$ vérifient les relations (7.2.12), les mesures limites ν^+_i vérifient les relations (7.2.10).

Afin de conclure la preuve, nous devons prouver que m^+ a une désintégration de Lebesgue. Ceci est vrai car d'une part, chaque $m^{F,+}_{x_n,R_n}$ a une désintégration de Lebesgue avec des densités locales uniformément log-bornées, et d'autre part la structure Riemannienne, et donc le volume, induite sur les feuilles de $\overline{\mathscr{W}}^+_{R_n}$ converge vers celle induite sur $\overline{\mathscr{W}}^u$. Finalement, afin de voir que les densités H_i vérifient les bonnes relations, nous raisonnons comme à la fin de la preuve du lemme 7.2.10. Nous pouvons conclure. $\square$.

3 | Un résultat d'équidistribution

Dans cette section, nous allons donner une interprétation de nos résultats sur les feuilletages transverses à une fibration en $\mathbb{CP}^1$ en termes d'actions de groupes paramétrées par une métrique Riemannienne de courbure négative. Une question typique est la suivante. Soit B une variété Riemannienne close et courbée négativement. Si $\rho : \pi_1(B) \to PSL_2(\mathbb{C})$ est une représentation projective de son groupe fondamental qui ne laisse aucune mesure invariante sur $\mathbb{CP}^1$, que peut-on dire de la distribution des orbites d'un point, paramétrée avec la structure Riemannienne ? Plus précisément, si N est le revêtement universel Riemannien de B, et si o est un point base choisi sur N, la métrique de B induit naturellement une fonction distance sur $\pi_1(B)$ par la formule $d(\gamma_1, \gamma_2) = \mathrm{dist}(\gamma_1 o, \gamma_2 o)$. Notons que puisque B est compacte, cette distance est quasi-isométrique à la distance des mots associée à un système fini de générateurs. Notons B_R la boule de rayon $R > 0$ pour d. Que dire des points d'accumulation des mesures de comptages suivantes :

$$\theta_R = \frac{1}{|B_R|} \sum_{\gamma \in B_R} \delta_{\rho(\gamma)x}$$

pour $x \in \mathbb{CP}^1$?

Nous proposons le théorème suivant, qui est une conséquence du résultat principal de cette section.

Theorème 7.3.1. *Soit $\rho : \pi_1(B) \to PSL_2(\mathbb{C})$ une représentation projective du groupe fondamental d'une variété Riemannienne close et courbée négativement, qui en laisse invariante aucune mesure de probabilité sur $\mathbb{CP}^1$. Alors, la famille θ_R converge vers une mesure qui est l'image de la mesure de Patterson-Sullivan par la section de Lyapunov.*

3.1 – Mesures de comptage pondérées

Par le théorème 7.1.29, s'il n'y a pas de mesure sur $\mathbb{CP}^1$ invariante par chaque $\rho(\gamma)$, $\gamma \in \pi_1(B)$, alors pour tout potentiel Hölder $F : B \to \mathbb{R}$, il existe une unique mesure F-harmonique pour le feuilletage $\mathscr{F}$, que l'on notera m_F. Par le théorème 7.1.32, on peut désintégrer cette mesure par rapport à h_0Leb dans la base, et l'on note $(m_{F,p})_{p\in B}$ le système de mesures conditionnelles dans les fibres (nous avions posé pour tout $p \in B$, $h_0(p) = \mathrm{mass}(\omega_p^F)$, où ω_p^F désigne la famille de mesure de Ledrappier dans les fibres unitaires tangentes associées au potentiel F). Nous rappelons que les mesures conditionnelles sont alors de la forme :

$$m_{F,p} = s_p^+ * \left[\frac{\omega_p^F}{\mathrm{mass}(\omega_p^F)}\right]$$

Nous voulons ici prouver que ces mesures, définies sur $\mathbb{CP}^1$, peuvent être obtenues comme limites de mesures de comptage pondérées. Considérons le poids suivant sur $\pi_1(B)$. Fixons *une fois pour toutes* un point base $o \in N$, et posons pour $\gamma \in \pi_1(B)$:

$$\kappa^F(\gamma) = \kappa^F(o, \gamma o).$$

Limite de mesures de comptage pondérées. Fixons $p \in B$, et $x \in V_p$. Nous nous intéressons aux *mesures de comptage pondérées* définies par :

$$\theta_{F,R} = \frac{1}{\sum_{\gamma\in B_R}\kappa^F(\gamma)} \sum_{\gamma\in B_R} \kappa^F(\gamma)\delta_{\rho(\gamma)^{-1}x}.$$

Le but principal de cette section est de prouver le théorème suivant.

Theorème 7.3.2. *Soit B une variété close courbée négativement, et $\rho : \pi_1(B) \to PSL_2(\mathbb{C})$ une représentation projective qui ne laisse invariante aucune mesure de probabilité sur $\mathbb{CP}^1$. Soit $F : T^1B \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder dont la pression est positive. Alors la mesure $\theta_{F,R}$ converge vers $m_{F,p}$ quand R croît indéfiniment.*

Remarque. Il y a une façon géométrique de comprendre $\theta_{F,R}$. Prenons les mesures sur N définies comme :

$$\tilde{\theta}_{F,R} = \frac{1}{\sum_{\gamma\in B_R}\kappa^F(\gamma)} \sum_{\gamma\in B_R} \kappa^F(\gamma)\delta_{\gamma o}.$$

La mesure $\theta_{F,R}$ est alors obtenue comme $\theta_{F,R} = \mathrm{proj}_x * \tilde{\theta}_{F,R}$, où $\mathrm{proj}_x : (N, o) \to (L_x, x)$ est le revêtement universel Riemannien qui envoie l'origine sur x.

Nous avons l'interprétation suivante de $\theta_{F,R}$. Considérons les grandes boules centrées en x tangentes à la feuilles. Si elle intersecte la fibre V_p en un point y, donnons à ce point le poids $\kappa^F(x, y)$ (si la boule intersecte la fibre plusieurs fois nous sommons les $\kappa^F(x, y)$ correspondant). La mesure $\theta_{F,R}$ est alors le barycentre des masses de Dirac aux intersections entre la boule et la fibre pondéré par ces κ^F.

3.2 – Preuve du théorème 7.3.2

Dans tout ce qui suit, nous supposerons les hypothèses du théorème 7.3.2 : $\rho : \pi_1(B) \to PSL_2(\mathbb{C})$ est une représentation projective du groupe fondamental d'une variété Riemannienne close et courbée négativement. Nous supposons de plus que cette action ne laisse aucune mesure invairante sur $\mathbb{CP}^1$.

Restriction à un petit cylindre. Sous les hypothèses du théorème 7.3.2, le théorème 7.2.3 nous dit qu'il y a une unique mesure F-harmonique m_F obtenue comme limite de moyennes pondérées sur les grandes boules dans les feuilles. L'idée est assez simple : dans un petit voisinage de la fibre, la restriction des moyennes pondérées dans les grandes boules centrées en x converge vers celles de m_F. Si nous parvenons à comparer ces mesures avec $\theta_{F,R}$, nous devrions, en faisant tendre la taille du voisinage vers zéro, pouvoir en déduire la convergence vers la mesure conditionnelle de m_F sur la fibre.

Prenons un petit $\varepsilon > 0$ de sorte que la boule $B(p,\varepsilon)$ trivialise le fibré, ainsi que le revêtement universel Riemannien $N \to B$. Soit le cylindre $K_{p,\varepsilon} = \Pi^{-1}(B(p,\varepsilon)) \simeq B(p,\varepsilon) \times \mathbb{CP}^1$: c'est un petit voisinage de la fibre V_p. Il vient avec une projection naturelle le long des feuilles $pr_\varepsilon : K_{p,\varepsilon} \to V_p$. Le bord de $K_{p,\varepsilon}$ est de mesure nulle pour m_F puisque la projection de m_F sur la base est équivalente par rapport au volume, et la sphère $S(p,\varepsilon)$ est de volume nul. En conséquence, nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 7.3.3. *En restriction à $K_{p,\varepsilon}$, la famille de mesures $\mu_{x,R}^F$ converge vers $(m_F)_{|K_{p,\varepsilon}}$ lorsque R croît indéfiniment.*

L'intersection entre la boule $B(x,R)$ est le petit cylindre n'est pas markovienne a priori. Il y a des composantes connexes de cette intersection qui ne croisent pas entièrement le cylindre. Puisque nous avons choisi un potentiel avec une pression positive, les effets de bords, et donc ces composantes non markoviennes, ne peuvent pas être négligées. Nous serons conduits à introduire deux mesures "markoviennes" définies par une formule similaire à (7.2.6).

Notation. Nous utiliserons les notations commodes suivantes pour deux quantités que nous serons amenés à comparer par la suite :

$$I_{F,R} = \int_{B(o,R)} \kappa^F(o,y)\, d\mathrm{Leb}(y), \tag{7.3.13}$$

$$J_{F,R} = \sum_{\gamma \in B_R} \kappa^F(\gamma). \tag{7.3.14}$$

Mesures markoviennes. Notons $\mu_{x,R,\varepsilon}^F$ la restriction de $\mu_{x,R}^F$ à $K_{p,\varepsilon}$. Nous remarquons qu'elle peut être obtenue comme la projection sur M par le revêtement universel Riemannien $\mathrm{proj}_x : N \to L_x$ de la mesure suivante :

$$\tilde{\mu}_R^F = \frac{1}{I_{F,R}} \sum_{\gamma \in B_R} \kappa^F(o,y) \mathrm{Leb}_{|B(o,R) \cap B(\gamma o,\varepsilon)}(y). \tag{7.3.15}$$

À présent, considérons les deux mesures $\mu_{x,R,\varepsilon}^{F\pm}$ définies comme $\mathrm{proj}_x * (\tilde{\mu}_R^{F\pm})$, où :

$$\tilde{\mu}_R^{F\pm} = \frac{1}{I_{F,R}} \sum_{\gamma \in B_{R,\varepsilon}^{\pm}} \kappa^F(o,y) \mathrm{Leb}_{|B(\gamma o,\varepsilon)}(y), \tag{7.3.16}$$

avec :

$$B_{R,\varepsilon}^- = \{\gamma \in \pi_1(B) \,|\, B(\gamma o,\varepsilon) \subset B(o,R)\} \text{ et } B_{R,\varepsilon}^+ = \{\gamma \in \pi_1(B) \,|\, B(\gamma o,\varepsilon) \cap B(o,R) \neq \emptyset\}.$$

En d'autres termes, $\mu_{x,R,\varepsilon}^{F-}$ ne charge que les composantes connexes de $B(x,R) \cap K_{p,\varepsilon}$ qui sont entièrement incluses dans $K_{p,\varepsilon}$, tandis que $\mu_{x,R,\varepsilon}^{F+}$ charge tous les petits disques qui rencontrent une composante connexe de $B(x,R) \cap K_{p,\varepsilon}$. Les inégalités $\mu_{x,R,\varepsilon}^{F-} \leq \mu_{x,R,\varepsilon}^F \leq \mu_{x,R,\varepsilon}^{F+}$ sont alors évidentes. Nous avons mieux :

Lemme 7.3.4. *Nous avons la chaîne suivante d'inégalités :*

$$\frac{I_{F,R-2\varepsilon}}{I_{F,R}}\mu^F_{x,R-2\varepsilon,\varepsilon} \leq \mu^{F-}_{x,R,\varepsilon} \leq \mu^F_{x,R,\varepsilon} \leq \mu^{F+}_{x,R,\varepsilon} \leq \frac{I_{F,R+2\varepsilon}}{I_{F,R}}\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon}.$$

Preuve. Comme nous l'avons dit plus haut, les deuxième et troisième inégalités sont immédiates. Prouvons la première, la dernière peut être prouvée par le même genre d'arguments. Il suffit de prouver que $B(x,R-2\varepsilon)\cap K_{p,\varepsilon}$ est inclus dans l'union des composantes connexes de $B(x,R)\cap K_{p,\varepsilon}$ qui croisent le cylindre.

Mais ceci est une conséquence assez directe de l'inégalité triangulaire. Si $y \in B(x,R-2\varepsilon)\cap K_{p,\varepsilon}$, nous projetons y sur V_p en considérant $\tilde{p} = pr_\varepsilon(y)$: en particulier, $\mathrm{dist}_{L_x}(y,\tilde{p}) \leq \varepsilon$. Si nous choisissons $y' \in B(\tilde{p},\varepsilon)$, alors :

$$\mathrm{dist}_{L_x}(y',x) \leq \mathrm{dist}_{L_x}(y',\tilde{p}) + \mathrm{dist}_{L_x}(\tilde{p},y) + \mathrm{dist}_{L_x}(y,x) \leq \varepsilon+\varepsilon+R-2\varepsilon = R.$$

Ainsi, la boule $B(\tilde{p},\varepsilon)$ est entièrement incluse dans $B(x,R)$: nous pouvons conclure la preuve du lemme. □

Projections sur la fibre. Nous avons introduit les mesures $\mu^{F\pm}_{x,R,\varepsilon}$ dans l'espoir de les comparer (ou plutôt de comparer leurs projections sur V_p) avec $\theta_{F,R}$. Considérons donc les projections de ces mesures sur la fibre V_p que nous notons $\theta^{\pm}_{F,R,\varepsilon}$.

Lemme 7.3.5. *Il existe un nombre $C(\varepsilon)\geq 1$ qui tend vers 1 lorsque ε décroît vers 0 tel que nous ayons la chaîne d'inégalités suivante (avec les notations définies par (7.3.13) et (7.3.14)) ait lieu :*

$$C(\varepsilon)^{-1}\frac{\theta^-_{F,R,\varepsilon}}{\mathrm{Leb}(B(p,\varepsilon))} \leq \frac{J_{F,R}}{I_{F,R}}\theta_{F,R} \leq C(\varepsilon)\frac{\theta^+_{F,R,\varepsilon}}{\mathrm{Leb}(B(p,\varepsilon))}.$$

Preuve. Par définition, $\theta_{F,R}$ s'obtient comme la projection sur M via proj_x des moyennes sur $B_R.o$ pondérées par les $\kappa^F(o,\gamma o)$.

Par définition encore, $\theta^{\pm}_{F,R,\varepsilon}$ peuvent être décrites de façon similaire. Considérons les mesures sur N qui donnent à tout point γo, avec $\gamma \in B^{\pm}_{R,\varepsilon}$, le poids $\int_{B(\gamma o,\varepsilon)}\kappa^F(o,y)d\mathrm{Leb}(y)$. Normalisons ces mesures par $I_{R,F}$, et projetons-les sur M via proj_x. On obtient ainsi $\theta^{\pm}_{F,R,\varepsilon}$.

Remarquons tout d'abord que $\mathrm{Supp}\,\theta^-_{F,R,\varepsilon}\subset \mathrm{Supp}\,\theta_{F,R}\subset\mathrm{Supp}\,\theta^+_{F,R,\varepsilon}$, puisque nous avons par définition la chaîne d'inclusions $B^-_{R,\varepsilon}\subset B_R\subset B^+_{R,\varepsilon}$.

À présent, nous devons comparer les poids que donnent ces mesures aux points de leurs supports. Par le lemme de distorsion 7.2.6, il existe un nombre $C(\varepsilon)$ qui tend vers 1 lorsque ε tend vers 0 tel que si $y,z\in N$ sont distants d'au plus ε, le quotient $\kappa^F(o,y)/\kappa^F(o,z)$ appartienne à $[C(\varepsilon)^{-1},C(\varepsilon)]$. Ainsi, pour tout $\gamma\in\pi_1(B)$, l'intégrale contre Lebesgue de $\kappa^F(o,.)$ sur la boule centrée en γo et de rayon ε est, à $C(\varepsilon)$ près, proche de la valeur en γo fois le volume de la boule. Puisque les volumes des boules de rayon ε sont égaux, nous concluons la preuve en faisant les normalisations nécessaires. □

Le lemme facile suivant nous permet de comparer les différentes quantités mises en jeu dans la preuve :

Lemme 7.3.6. *Les assertions suivantes sont vraies :*

1. $I_{R+\varepsilon,\varepsilon}/I_{R,\varepsilon}\to e^{P(F)\varepsilon}$ *lorsque R tend à l'infini ;*
2. *pour $\varepsilon>0$ assez petit, nous avons :*

$$C(\varepsilon)^{-1}I_{F,R-2\varepsilon}\frac{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R-2\varepsilon,\varepsilon})}{\mathrm{Leb}(B(p,\varepsilon))} \leq J_{F,R} \leq C(\varepsilon)I_{F,R+2\varepsilon}\frac{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon})}{\mathrm{Leb}(B(p,\varepsilon))}.$$

Preuve. La première assertion est une conséquence immédiate du théorème de Ledrappier 7.2.2. Le seconde, elle, s'obtient juste en évaluant les masses dans les inégalités des lemmes 7.3.5 and 7.3.4. □

Remark. Puisque, $m_F(\partial K_{p,\varepsilon}) = 0$, nous avons par le lemme 7.3.3, que lorsque R tend vers l'infini, $\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R,\varepsilon})$ converge vers $m_F(K_{p,\varepsilon})$ qui vaut $\int_{B(p,\varepsilon)} h_0\, d\mathrm{Leb}$.

Les mesures convergent... Nous allons prouver que les mesures $(\theta_{F,R})_{R>0}$ forment une famille de Cauchy. Puisque l'espace des mesures de probabilités sur M est un espace métrique compact pour la topologie faible-$*$, cela entraîne que cette famille est convergente. Le lemme suivant est la première étape : pour une fonction continue $f : V_p \to \mathbb{R}$, nous allons pincer son intégrale contre $\theta_{F,R}$ entre deux quantités qui deviennent de plus en plus proches. Nous aurons besoin de la notation suivante :

$$\Lambda(p) = \int_{B(p,\varepsilon)} h_0\, d\mathrm{Leb}.$$

Lemme 7.3.7. *Il existe une constante $C'(\varepsilon) > 1$ qui tend vers 1 lorsque ε tend vers 0, ainsi qu'une constante $R_0 > 0$, telles que pour toute fonction continue $f : V_p \to \mathbb{R}$, tout $R > R_0$, et tout petit $\varepsilon > 0$,*

$$C'(\varepsilon)^{-1} \int_{K_{p,\varepsilon}} f \circ pr_\varepsilon \frac{d\mu^F_{x,R-2\varepsilon,\varepsilon}}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R-2\varepsilon,\varepsilon})} \leq \int_{V_p} f\, d\theta_{F,R} \leq C'(\varepsilon) \int_{K_{p,\varepsilon}} f \circ pr_\varepsilon \frac{d\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon}}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon})}$$

Preuve. Nous ne prouvons que la majoration : la minoration découle du même argument. Rappelons que, par définition, $\theta^+_{F,R,\varepsilon}$ est la projection via pr_ε de $\mu^{F+}_{x,R,\varepsilon}$ de sorte que pour toute fonction continue $f : V_p \to \mathbb{R}$, nous ayons $\int_{V_p} f\, d\theta^+_{F,R,\varepsilon} = \int_{K_{p,\varepsilon}} (f \circ pr_\varepsilon) d\mu^{F+}_{x,R,\varepsilon}$. Mais nous pouvons combiner les lemmes 7.3.4 et 7.3.5 de façon à prouver l'inégalité suivante, valide pour tous f, R, et $\varepsilon > 0$ assez petit :

$$\int_{V_p} f\, d\theta_{F,R} \leq C(\varepsilon) \frac{I_{F,R+2\varepsilon}}{J_{F,R}} \int_{K_{p,\varepsilon}} f \circ pr_\varepsilon \frac{d\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon}}{\mathrm{Leb}(B(p,\varepsilon))}.$$

Si l'on utilise le lemme 7.3.6, deux choses viennent alors. Premièrement, nous pouvons utiliser la borne inférieure de $J_{F,R}$, de façon à avoir la majoration suivante :

$$\int_{V_p} f\, d\theta_{F,R} \leq C(\varepsilon)^2 \frac{I_{F,R+2\varepsilon}}{I_{F,R-2\varepsilon}} \int_{K_{p,\varepsilon}} f \circ pr_\varepsilon \frac{d\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon}}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R-2\varepsilon,\varepsilon})}.$$

Deuxièmement, nous savons que $I_{F,R+2\varepsilon}/I_{F,R-2\varepsilon} \to e^{4P(F)\varepsilon}$ quand R tend vers l'infini.

Finalement, comme nous l'avons expliqué dans la remarque précédente,

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{mass}(\mu^F_{x,R,\varepsilon}) = \Lambda(p),$$

de sorte que, quand R est suffisamment grand, nous puissions indistinctement diviser la borne supérieure par $\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R-2\varepsilon,\varepsilon})$, ou par $\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon})$. L'existence de constantes $R_0 > 0$ et $C'(\varepsilon)$ telles que la majoration énoncée dans le lemme ait lieu suit alors, nous permettant de conclure la preuve du lemme. □

Nous pouvons à présent prouver le résultat principal de cette section :

Proposition 7.3.8. *La famille $(\theta_{F,R})_{R>0}$ est de Cauchy, et converge donc dans la topologie faible-$*$.*

Preuve. Pour $\delta > 0$, nous pouvons choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $C'(\varepsilon) - C'(\varepsilon)^{-1} \leq \delta/2$. Choisissons un tel δ, et un tel ε. La mesure $\mu^F_{x,R,\varepsilon}/\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R,\varepsilon})$ converge vers $(m_F)_{|K_{p,\varepsilon}}/\Lambda(p)$ elle est donc de Cauchy dans le sens qu'étant donné $\delta > 0$, il existe $R_1 > R_0$ tel que pour toute fonction continue $\tilde{f} : K_{p,\varepsilon} \to \mathbb{R}$ avec $\mathrm{Sup}\,|\tilde{f}| \leq 1$, et $R, R' > R_1$,

$$\left| \int_{K_{p,\varepsilon}} \tilde{f} \frac{d\mu^F_{x,R,\varepsilon}}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R,\varepsilon})} - \int_{K_{p,\varepsilon}} \tilde{f} \frac{d\mu^F_{x,R',\varepsilon}}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R',\varepsilon})} \right| \leq \delta/2.$$

Soit $f : V_p \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $\mathrm{Sup}\,|f| \leq 1$. La fonction $f \circ pr_\varepsilon$ est continue sur $K_{p,\varepsilon}$ avec $\mathrm{Sup}\,|f \circ pr_\varepsilon| \leq 1$, et nous avons, par le lemme 7.3.7 pour $R, R' > R_1 + 2\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_p} f d\theta_{F,R} - \int_{V_p} f d\theta_{F,R'} \right| &\leq (C'(\varepsilon) - C'(\varepsilon)^{-1}) \int_{K_{p,\varepsilon}} |f \circ pr_\varepsilon| \frac{d\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon}}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon})} \\ &+ C'(\varepsilon)^{-1} \left| \int_{K_{p,\varepsilon}} f \circ pr_\varepsilon \frac{d\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon}}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon})} - \int_{K_{p,\varepsilon}} f \circ pr_\varepsilon \frac{d\mu^F_{x,R'-2\varepsilon,\varepsilon}}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R'-2\varepsilon,\varepsilon})} \right| \\ &\leq \delta/2 + \delta/2 = \delta, \end{aligned}$$

la dernière inégalité a lieu car $C'(\varepsilon)^{-1}$ et $|f \circ pr_\varepsilon|$ sont inférieurs à 1, et car $\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon}/\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon})$ est une mesure de probabilité sur $K_{p,\varepsilon}$.

Ce qui précède prouve donc que $(\theta_{F,R})_{R>0}$ est une famille de Cauchy dans l'espace des mesures de probabilités sur M (qui est compact pour la mesure de probabilités sur M pour la topologie faible-$*$). Ainsi elle converge, et la preuve de la proposition est achevée. $\square$

...et il n'y a pas de choix de limite. Le meilleur candidat de limite possible est sans doute la mesure conditionnelle sur la fibre V_p de l'unique mesure F-harmonique m_F. C'est la seconde moitié du théorème 7.3.2 :

Proposition 7.3.9. *La limite de $\theta_{F,R}$ est la mesure de probabilité $m_{F,p}$.*

Preuve. Notons $\theta_{F,\infty}$ la limite de $\theta_{F,R}$. Par compacité de V_p, nous avons pour tout ensemble de Borel $A \subset V_p$, $\lim_{R\to\infty} \theta_{F,R}(A) = \theta_{F,\infty}(A)$. Par définition, la mesure conditionnelle de m_F sur V_p vérifie pour tout ensemble de Borel $A \subset V_p$:

$$m_{F,p}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m_F(pr_\varepsilon^{-1}(A))}{m_F(K_{p,\varepsilon})}.$$

En utilisant une nouvelle fois le lemme 7.3.7, nous trouvons pour tout ensemble de Borel $A \subset V_p$:

$$C'(\varepsilon)^{-1} \frac{\mu^F_{x,R-2\varepsilon,\varepsilon}(pr_\varepsilon^{-1}(A))}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R-2\varepsilon,\varepsilon})} \leq \theta_{F,R}(A) \leq C'(\varepsilon) \frac{\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon}(pr_\varepsilon^{-1}(A))}{\mathrm{mass}(\mu^F_{x,R+2\varepsilon,\varepsilon})}.$$

En faisant tendre d'abord R à l'infini, puis ε vers zéro, nous trouvons $\theta_{F,\infty}(A) = m_{F,p}(A)$ oiur tout ensemble de Borel $A \subset V_p$. La preuve de la proposition, est donc celle du théorème 7.3.2 est donc finie. $\square$

4 | Appendice : cocycle projectif à spectre de Lyapunov simple

Le but de cet appendice est de prouver le résultat suivant qui semble bien connu des spécialistes. Comme la preuve est courte et très simple, et que nous n'en avons pas trouvé de trace écrite dans la littérature, nous avons décidé de la donner dans cet appendice.

Theorème 7.4.1. *Soit φ_t un flot continu d'un espace métrique compact B. Soit $\Pi : M \to B$ un fibré continu de fibre $\mathbb{CP}^{d-1}$, $d \geq 2$, et $\Phi_t : M \to M$ un cocycle projectif au dessus de φ_t. Finalement, soit μ une mesure de probabilité sur B invariante par φ_t, ergodique et de spectre de Lyapunov simple.*

Alors, les seules mesures de probabilité invariante par Φ_t et ergodiques qui se projettent sur μ sont les mesures $\mu^j = \sigma^j * \mu$, où les σ^j sont les sections de Lyapunov du cocycle (avec $j = 1, \ldots, d$).

Cocycles projectifs. Nous considérons un espace métrique compact B avec un flot continu φ_t : $B \to B$ (c'est-à-dire un groupe continu à 1 paramètre d'homéomorphismes).

Un cocycle projectif au dessus de φ_t est donné par :

1. un fibré continu $\Pi : M \to B$ de fibre projective $\mathbb{CP}^{d-1}$; nous notons les fibres de ce cocycle $V_p = \Pi^{-1}(p)$, et le munissons d'une métrique projective continue ;
2. un flot continu $\Phi_t : M \to M$ qui se projette sur φ_t via Π, et envoie fibre sur fibre comme une application projective.

Pour un tel cocycle, nous noterons

$$A_t(p) = (\Phi_t)_{|V_p} : V_p \to V_{\varphi_t(p)},$$

la restriction du flot Φ_t aux fibres. Nous avons alors $A_t(p) \in PSL_d(\mathbb{C})$. Cette application vérifie la relation de cocycle suivante :

$$A_{t_1+t_2}(p) = A_{t_1}(\varphi_{t_1}(p))A_{t_2}(p),$$

pour tout $p \in B$ et $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Exposants de Lyapunov. Le théorème d'Oseledets assure l'existence d'*exposants de Lyapunov* pour le cocycle Φ_t sur un ensemble de Borel $\mathscr{X} \subset B$ plein pour toute mesure invariante par φ_t. Plus précisément, pour chaque $p \in \mathscr{X}$ nous avons une décomposition de la fibre :

$$V_p = V_p^1 \oplus \ldots \oplus V_p^{k(p)},$$

ainsi que des nombres réels $\chi_1(p) < \chi_2(p) < \ldots < \chi_{k(p)}$ tels que :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log ||A_T(p)v_j|| = \chi_j(p),$$

pour tout $v_j \in V_p^j$, $j = 1, \ldots, k(p)$ non nul. Dans cette définition, nous avons fait un abus : nous avons fait comme si le fibré était linéaire, et identifié $A_t(p)$ avec un élément de $SL_d(\mathbb{C})$. C'est quelque chose que nous pouvons faire localement, et les nombres χ_j ne dépendent ni du choix de la carte trivialisante, ni de la linéarisation que nous choisissons (l'ambigüité dans le choix d'une linéarisation vit dans le groupe cyclique engendré par l'homothétie de rapport $e^{2\mathbf{i}\pi/k}$) : voir la discussion faite au début de [BGV].

Nous nous intéressons au cas où μ est une mesure de probabilité ergodique invariante par φ_t. Dans ce cas, les nombres $k(p)$, et $\chi_j(p)$ sont constants pour μ-presque tout point p.

Spectre de Lyapunov simple. Soit $\Phi_t : B \to B$ un cocycle projectif au dessus de φ_t, et μ une mesure φ_t-invariante et ergodique sur B. Nous nous intéressons au cas où les exposants de Lyapunov ont multiplicité 1 (voir la définition ci-dessous). Dans [BV], Bonatti et Viana generalisent le théorème 7.1.1 et trouvent des critères qui assurent que c'est le cas pour une large variété de cocycles au dessus les sous-décalages de type fini.

Définition 7.4.2. *Nous disons que Φ_t a un spectre de Lyapunov simple pour μ si chaque V_p^j coïncide avec un point $\sigma^j(p)$ de $V_p \simeq \mathbb{CP}^{d-1}$ pour μ-presque tout $p \in B$.*

Si le spectre de Lyapunov est simple, alors $k = d$, $\chi_1 < \chi_2 < \ldots < \chi_d$, et nous avons des sections mesurables, définies μ-presque partout, que nous appelons les *sections de Lyapunov* :

$$\sigma^j : B \to M.$$

Nous considérons le drapeau positif : $S_+(p) = (S_+^1(p), S_+^2(p), \ldots, S_+^d(p))$ où, pour $1 \leq j \leq d$:

$$S_+^j(p) = \sigma^1(p) \oplus \sigma^2(p) \oplus \ldots \oplus \sigma^j(p).$$

La proposition suivante vient directement de la preuve du théorème d'Oseledets :

Proposition 7.4.3. *Quand le spectre de Lyapunov du cocycle Φ_t est simple pour une mesure ergodique μ sur B, alors les objets définis plus tôt vérifient les propriétés suivantes.*

1. *Le drapeau $S_+(p)$ varie mesurablement avec p.*
2. *Il est invariant par le cocycle : pour tout $t \in \mathbb{R}$, et μ-presque tout $p \in B$, $A_t(p)S_+(p) = S_+(\varphi_t(p))$.*
3. *Si $1 < j \leq d$, alors pour μ-presque tout $p \in B$, et tout $x \in S_+^j(p) \setminus S_+^{j-1}(p)$, nous avons :*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \operatorname{dist}(A_T(p)x, \sigma^j(\varphi_T(p))) = \lambda_j - \lambda_{j-1}.$$

Relevés des mesures ergodiques et leurs bassins. Il est possible de relever une mesure μ dont le spectre de Lyapunov est simple par les sections : pour $j = 1, \ldots, d$, considérons :

$$\mu^j = \sigma^j * \mu.$$

Remarque. Une telle mesure μ^j peut être désintégrée par rapport à μ, et les mesures conditionnelles dans les fibres sont les masses de Dirac concentrées en les $\sigma^j(p)$.

Pour une mesure ergodique ν sur M invariante par Φ_t, nous définissons le bassin positif de ν comme l'ensemble des points dont l'orbite est attirée dans le futur par ν :

$$\mathscr{B}^+(\nu) = \left\{ x \in M ;\ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \delta_{\Phi_t(x)} dt = \nu \right\},$$

par le théorème de Birkhoff, $\nu(\mathscr{B}^+(\nu)) = 1$.

Lemme 7.4.4. *Les mesures μ^j sont invariantes et ergodiques pour Φ_t. De plus, il y a un ensemble de Borel $Y \subset B$ de mesure pleine pour μ tel que pour tout $j = 1, \ldots d$,*

$$\mathscr{B}^+(\mu^j) = \bigcup_{p\in Y} S_+^j(p) \setminus S_+^{j-1}(p).$$

Preuve. L'invariance découle de la deuxième assertion de la proposition 7.4.3, ainsi que de la φ_t-invariance de μ.

La mesure μ^j est ergodique. En effet, prenons un ensemble $Z \subset M$ qui est Φ_t-invariant. Par ergodicité de μ, sa projection sur B soit pleine, soit nulle. Si elle est nulle, alors $\mu^j(Z) = 0$, donc nous supposons qu'elle est pleine. Dans cas, il y a deux choix : soit Z contient $\sigma^j(p)$ pour un certain p, soit il ne contient aucun $\sigma^j(p)$. Par invariance de la section, et de Z, cette alternative devient : soit Z contient presque tous les $\sigma^j(p)$ soit il n'en contient presque aucun. Comme les mesures conditionnelles de μ^j sont précisément les masses de Dirac en les $\sigma^j(p)$, nous voyons que dans le premier cas, $\mu^j(Z) = 1$, et que dans le second, $\mu^j(Z) = 0$.

Puisque μ est ergodique, nous avons $\mu(\mathscr{B}^+(\mu)) = 1$. De plus, pour un ensemble $Y_0 \subset B$ plein pour μ, la troisième propriété énoncée dans la proposition 7.4.3 est vérifiée. Considérons $Y = Y_0 \cap \mathscr{B}^+(\mu)$ qui est plein pour μ. Soit $j \leq d$, nous savons que pour tout $p \in Y$ et $x \in S^j(p) \setminus S^{j-1}(p)$, les points $A_t(p)x$ et $\sigma^j(\varphi_t(p))$ s'approchent exponentiellement vite quand t croît indéfiniment. Par ergodicité de μ^j, les moyennes de Birkhoff de $\sigma^j(p)$ convergent vers μ^j, et puisque celles de x s'en approchent exponentiellement vite, elles doivent également converger vers μ^j (on rappelle que muni de la topologie de la convergence faible-$*$, l'espace des mesures de probabilité de M est compact et métrisable).

Cela montre que $S^j(p) \setminus S^{j-1}(p) \subset \mathscr{B}^+(\mu^j)$. Mais puisque les ensembles $S^j(p) \setminus S^{j-1}(p)$ forment une partition de V_p et puisque les bassins $\mathscr{B}^+(\mu^j)$ sont tous disjoints (les mesures sont singulières), nous avons $S^j(p) \setminus S^{j-1}(p) = \mathscr{B}^+(\mu^j)$. □

Preuve du théorème 7.4.1. Il vient à partir du lemme 7.4.4 que les bassins $\mathscr{B}^+(\mu^j)$ forment une partition par ensembles Φ_t-invariants de $\Pi^{-1}(Y)$ (où Y est donné par ce lemme, oin rappelle que $\mu(Y) = 1$). Pour une mesure ergodique $\bar{\mu}$ pour Φ_t qui se projette sur μ, nous avons $\bar{\mu}(\Pi^{-1}(Y)) = \mu(Y) = 1$, et son bassin doit être inclus dans celui de l'un des μ^j. Alors, $\bar{\mu}$ coïncide avec l'un des μ^j. La preuve est donc achevée. □

Chapitre VIII

Représentations fuchsiennes et quasi-fuchsiennes

1 | Correspondance au bord et reparamétrage du flot géodésique

1.1 – Correspondance au bord

Équivariance bilipschitz. Soit Σ une suface de Riemann compacte de genre ≥ 2. Nous considérons deux métriques hyperboliques différentes g_1 et g_2 sur Σ (c'est-à-dire deux éléments distincts de l'espace de Teichmüller).

Par uniformisation, on trouve deux copies Γ_1 et Γ_2 de $\pi_1(\Sigma)$ dans le groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$ des isométries directes du disque muni de la métrique hyperbolique :

$$ds^2 = 4\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2},$$

ainsi que deux revêtements Riemanniens $\Pi_1 : \mathbb{D} \to (\Sigma, g_1)$ et $\Pi_2 : \mathbb{D} \to (\Sigma, g_2)$ qui sont respectivement invariants par les actions de Γ_1 et Γ_2.

Notons $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ l'isomorphisme associé, unique à conjugaison près par un élément de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$.

Si nous relevons l'identité via Π_1 et Π_2, on obtient un homéomorphisme $h : (\mathbb{D}, 0) \to (\mathbb{D}, 0)$ vérifiant la relation d'équivariance suivante, valide pour tout $\gamma \in \Gamma_1$

$$h \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ h.$$

Géométriquement, on a envoyé le polygône fondamental pour l'action de Γ_1 qui contient 0, noté P_1, sur le polygône fondamental pour l'action de Γ_2 qui contient 0, noté P_2, tout en envoyant 0 sur 0, puis on a étendu cette correspondance par équivariance. Nous pouvons alors prouver que h est bilipschitz (voir la section 5.9 de [T]).

Correspondance au bord. Nous pouvons toujours étendre une telle équivariance aux bords à l'infini. Plus précisément, le lemme suivant est prouvé dans la section 5.9 de [T] :

Lemme 8.1.1. *Il existe un nombre $C_1 > 0$ tel que pour toute géodésique c sur $\mathbb{D}$, l'image $h(c)$ reste à distance bornée par C_1 d'une unique géodésique.*

Nous pouvons alors étendre l'homéomorphisme h en une fonction continue $h : \mathbb{D} \cup S_\infty \to \mathbb{D} \cup S_\infty$, qui de plus conjugue les actions de Γ_1 et Γ_2 sur $\mathbb{D} \cup S_\infty$: l'application qui à $\xi \in S_\infty$ associe le point à l'infini de $h([x, \xi))$ ne dépend pas du point base x, et définit une extension continue de la fonction h. Nous pouvons même prouver que h est Hölder au bord. Nous en donnons la preuve car c'est de cette preuve simple que nous nous inspirons pour prouver notre théorème principal.

Lemme 8.1.2. *La correspondance au bord $h : S_\infty \to S_\infty$ est Hölder.*

Preuve. Prenons un arc de cercle $I_\varepsilon = [\xi^-, \xi^+] \subset S_\infty$ de longueur ε. Considérons la géodésique $c_\varepsilon = (\xi^-, \xi^+)$ dans $\mathbb{D}$. Alors l'origine est à distance $\sim -\log \varepsilon$ de cette géodésique. En effet, pour tout $z \in \mathbb{D}$, nous avons :

$$\mathrm{dist}(0, z) = \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Puisque, lorsque ε est suffisamment petit, le module de la projection orthogonale de 0 sur c_ε, notée z_ε, est approximativement $1 - \varepsilon/2$, nous trouvons alors :

$$\mathrm{dist}(o, z_\varepsilon) \sim \log \frac{2}{\varepsilon/2} = \log 4 - \log \varepsilon \sim -\log \varepsilon.$$

Évaluons à présent la taille de l'intervalle $h(I_\varepsilon)$. Puisque h est Lipschitz et fixe 0, il existe $C_0 > 1$ tel que la distance de 0 à la géodésique c'_ε pistant $h(c_\varepsilon)$ soit $\geq -C_0^{-1}\log\varepsilon$, et la taille de $h(I_\varepsilon)$ est ainsi contrôlée par $\varepsilon^{C_0^{-1}}$. Nous pouvons ainsi conclure. □

1.2 – Action sur les birapports.

Lorsque $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in S_\infty$, il y a une unique homographie envoyant ξ_1 sur 0, ξ_2 sur 1 et ξ_3 sur ∞. Nous notons cette homographie $\xi \mapsto [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi]$, et le crochet désigne ce que l'on appelle le *birapport*. Nous donnons ci-dessous la formule pour le birapport :

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] = \frac{\xi_4 - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_4 - \xi_3}. \tag{8.1.1}$$

Définition 8.1.3. *On dit de $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in S_\infty$ qu'ils forment une division harmonique si* $[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] = -1$.

Géométriquement, cela correspond, lorsque les quatre points sont orientés dans cet ordre sur le cercle, au cas où la géodésique (ξ_1, ξ_3) coupe orthogonalement la géodésique (ξ_2, ξ_4).

Quelques lemmes géométriques. Nous allons prouver quelques lemmes élémentaires dont nous aurons besoin par la suite. Le premier nous servira à paramétrer le flot géodésique.

Lemme 8.1.4. *Soit $\xi_-, \xi_1, \xi_2, \xi_+ \in S_\infty$ alignés dans cet ordre. Soit, pour $i = 1,2$ z_i l'intersection entre (ξ_-, ξ_+) et l'unique géodésique orthogonale issue de ξ_i. Alors :*

$$\mathrm{dist}(z_1, z_2) = \log[\xi_-, \xi_1, \xi_+, \xi_2].$$

Preuve. Nous pouvons composer par l'unique homographie envoyant dans cet ordre $\xi_-, \xi_1, \xi_+, \xi_2 \in S_\infty$ sur $0, 1, \infty$ et $\beta = [\xi_-, \xi_1, \xi_+, \xi_2]$. On a $\beta > 1$ car l'homographie préserve l'orientation et ξ_2 est strictement entre ξ_1 et ξ_+.

Cette homographie envoie *isométriquement* $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{H}$ (nous avons déjà travaillé dans $\mathbb{H}$ muni de la métrique de Poincaré). Elle envoie également, par définition, z_1 sur $\mathbf{i}$, et z_2 sur $\mathbf{i}\beta$. Ainsi :

$$\mathrm{dist}(z_1, z_2) = \mathrm{dist}(\mathbf{i}, \mathbf{i}\beta) = \log\beta$$

. □

Lemme 8.1.5. *Soit $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in S_\infty$ se trouvant alignés dans cet ordre. Notons d la distance entre les géodésiques (ξ_1, ξ_2) et (ξ_3, ξ_4). Nous avons alors :*

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] = -\sinh^2\frac{d}{2}.$$

Preuve. Les points $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in S_\infty$ étant alignés dans cet ordre, les géodésiques (ξ_1, ξ_2) et (ξ_3, ξ_4) ne se coupent pas et il existe une unique géodésique, notée c, orthogonale à (ξ_1, ξ_2) et (ξ_3, ξ_4). Nous pouvons supposer que $\xi_- = c(-\infty)$ est dans l'arc de cercle $[\xi_1, \xi_2]$, et que l'autre extrémité $\xi_+ = c(\infty)$ est dans l'arc de cercle $[\xi_3, \xi_4]$.

Nous pouvons composer par l'unique homographie envoyant ξ_- sur 0, ξ_+ sur ∞, et, mettons, ξ_1 sur -1. Ici encore, cette homographie envoie S_∞ sur $\mathbb{RP}^1$ en préservant l'orientation, donc elle envoie $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{H}$ de manière isométrique.

Puisque (ξ_1, ξ_2) est orthogonale à c, il vient que son image est orthogonale à la demi-droite verticale issue de 0 : c'est le demi-cercle unité, en particulier, $\xi_2 = 1$. De même, si $\xi > 1$ est l'image de ξ_3 (ici encore l'image est > 1 à cause de l'orientation), celle de ξ_4 est $-x$, et on a alors, puisque l'homographie préserve les birapports (voir la formule 8.1.1) :

$$[\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4] = [-1,1,\xi,-\xi] = -\frac{(\xi-1)^2}{4\xi}.$$

Nous noterons β ce birapport. La distance entre les géodésiques (ξ_1,ξ_2) et (ξ_3,ξ_4) est égale à celle entre $(-1,1)$ et $(-\xi,\xi)$, c'est-à-dire $d = \log\xi$. Nous trouvons finalement, ce qui nous permet de conclure :

$$\beta = -\frac{(e^d-1)^2}{4e^d} = -\frac{1}{4}(e^{\frac{d}{2}} - e^{-\frac{d}{2}})^2 = -\sinh^2\frac{d}{2}.$$

□

Lemme 8.1.6. *Soit $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4 \in S_\infty$, quatre points formant une division harmonique. Notons x l'intersection des géodésiques (ξ_1,ξ_3) et (ξ_2,ξ_4). Soit $\xi \in S_\infty$ tel que la géodésique (ξ_2,ξ) croise (ξ_1,ξ_3) en un point y. Alors, si $\beta = [\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi]$:*

$$d = \mathrm{dist}(x,y) = \frac{1}{2}\left|\log|\beta|\right|.$$

La distance d sera appelée ***déviation par rapport à la division harmonique****.*

Si de plus nous considérons l'angle θ formé par les rayons géodésiques $[y,\xi_3)$ et $[y,\xi)$, nous avons :

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{|\beta|}}{1-\beta}.$$

Preuve. Soit $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi,x,y$ comme décrits dans l'énoncé du lemme. Nous pouvons composer par l'homographie envoyant ξ_1,ξ_2,ξ_3 et ξ_4 respectivement sur $0,1,\infty,-1$: ξ est alors envoyé sur $\beta = [\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi] < 0$ (car la géodésique (ξ_2,ξ) rencontre (ξ_1,ξ_3)). Notons y' l'image de y. C'est le point d'intersection entre la demi-droite verticale issue de 0, et le cercle centré en $z = (\beta+1)/2$, et de rayon $r = (1-\beta)/2$.

La distance $d = \mathrm{dist}(x,y)$ à calculer est alors donnée par $|\log(||\overrightarrow{0y'}||)|$. Une application du théorème de Pythagore entraîne $r^2 = ||\overrightarrow{z0}||^2 + ||\overrightarrow{0y'}||^2$. De sorte que :

$$\left|\left|\overrightarrow{0y'}\right|\right|^2 = \left(\frac{\beta-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2 = |\beta|.$$

Nous trouvons donc $||\overrightarrow{0y'}|| = \sqrt{|\beta|}$, puis nous avons bien $\mathrm{dist}(x,y) = 1/2|\log(|\beta|)|$.

Puisque les homographies préservent les angles, l'angle θ est exactement l'angle selon lequel se coupent la tangente en y' au demi-cercle de centre z et de rayon r, et la demi-droite verticale verticale issue de y'. Nous calculons le sinus de cet angle par une formule trigonométrique très classique pour obtenir, ce qui nous permet de conclure :

$$\sin\theta = \frac{\left|\left|\overrightarrow{0y'}r\right|\right|}{r} = \frac{2\sqrt{|\beta|}}{1-\beta}.$$

□

Action sur les birapports. Lorsque nous avons deux métriques hyperboliques sur Σ, nous avons défini la correspondance au bord $h : S_\infty \to S_\infty$ et vu qu'elle satisfait une condition d'équivariance, et qu'elle est Hölder continue.

Nous aimerions donner une autre propriété de ces fonctions : l'image par h de quatre points formant un division harmonique ne forme pas, a priori, une division harmonique. Néanmoins, le birapport des images des quatre points est *uniformément* proche de -1 : nous disons que h est *quasi-symétrique.*

Proposition 8.1.7. *Soit g_1 et g_2 deux métriques hyperboliques différentes sur Σ, et $h : \mathbb{D} \cup S_\infty \to \mathbb{D} \cup S_\infty$ l'équivariance décrite au paragraphe précédent. Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout quadruplet de points du bord $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ alignés dans cet ordre et formant une division harmonique, on ait :*

$$|[h(\xi_1), h(\xi_2), h(\xi_3), h(\xi_4]| \leq M.$$

Preuve. Considérons quatre points formant une division harmonique $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. Le lemme 8.1.5 nous permet de calculer explicitement la distance d entre les géodésiques (ξ_1, ξ_2) et (ξ_3, ξ_4). Plus précisément, nous avons $d = 2\sinh^{-1}(1)$.

L'application h préservant l'orientation, les points $h(\xi_1), h(\xi_2), h(\xi_3)$ et $h(\xi_4)$ se trouvent alignés dans cet ordre. Par le même lemme 8.1.5, pour borner le birapport, il suffit de borner la distance entre les géodésiques $(h(\xi_1), h(\xi_2))$ et $(h(\xi_3), h(\xi_4))$.

Considérons alors c la géodésique orthogonale à (ξ_1, ξ_2) et à (ξ_3, ξ_4). Appelons x et y les intersections respectives de c avec (ξ_1, ξ_2) et (ξ_3, ξ_4). L'image par h d'une géodésique reste à distance uniformément bornée d'une géodésique, donc il existe un réel positif C_1 tel que les images $h(\xi_1, \xi_2)$, $h(\xi_3, \xi_4)$, et $h(c)$ soient respectivement à distance $\leq C_1$ de $(h(\xi_1), h(\xi_2))$, $(h(\xi_3), h(\xi_4))$ et d'une certaine géodésique c'. Puisque la fonction h est Lipschitz, nous avons $\operatorname{dist}(h(x), h(y)) \leq C_0 d$. Puisque $h(x)$ et $h(y)$ sont respectivement à distance $\leq C_1$ d'un point de $(h(\xi_1), h(\xi_2))$, et $(h(\xi_3), h(\xi_4))$, et puisque $h(c)$ est à distance $\leq C_1$ de c', nous trouvons bien une constante M, indépendante des ξ_i, qui majore la distance des points d'intersections entre c' et ces deux géodésiques. C'est donc que la distance entre les deux géodésiques est uniformément majorée par M. CQFD. □

Nous tirons de cette proposition la conséquence suivante.

Proposition 8.1.8. *Soit g_1 et g_2 deux métriques hyperboliques différentes sur Σ, et $h : S_\infty \to S_\infty$ la correspondance au bord associée. Il existe une constante uniforme positive $D > 0$ telle que pour tout quadruplet de points du bord $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, formant une division harmonique, la déviation par rapport à la division harmonique du quadruplet $(h(\xi_1), h(\xi_2), h(\xi_3), h(\xi_4))$ soit bornée par D.*

Il existe de plus un réel θ_0 tel que l'angle entre les deux géodésiques $(h(\xi_1), h(\xi_3))$ et $(h(\xi_2), h(\xi_4))$ est compris entre $\pi/2 - \theta_0$ et $\pi/2 + \theta_0$.

Preuve. Cette proposition découle directement de la proposition précédente et du lemme géométrique 8.1.6. □

1.3 – Équivalence orbitale des flots géodésiques

Lorsque g_1 et g_2 sont deux métriques hyperboliques sur la même surface Σ, nous noterons g_t^1 et g_t^2 les flots géodésiques correspondants sur $T^1\Sigma$.

Identification équivariante du fibré unitaire tangent. Nous allons présenter une construction dûe à Gromov (voir [Gro]). Notons $S_\infty^{(3)}$ l'ensemble des triplets orientés dans cet ordre (dans le sens trigonométrique) $(\xi_+, \xi_0, \xi_-) \in (\Sigma(\infty))^3$. Puisque Γ_1 et Γ_2 préservent l'orientation, le groupe $\pi_1(\Sigma)$ agit diagonalement sur $S_\infty^{(3)}$. Il y a une identification naturelle $T^1\widetilde{\Sigma} \to S_\infty^{(3)}$ associant à tout vecteur v le triplet $(pr_+(v), pr_0(v), pr_-(v))$, où :

- $pr_+(v) = c_v(-\infty) \in S_\infty$;
- $pr_-(v) = c_v(\infty) \in S_\infty$;
- $pr_0(v) \in S_\infty$ est l'extrémité de la géodésique orthogonale à v qui satisfait $pr_+(v) < pr_0(v) < pr_-(v)$ pour l'ordre trigonométrique.

Remarque. À un vecteur $v \in T^1\mathbb{D}$ est donc associé un quadruplet $(pr_+(v), pr_0(v), pr_-(v), pr_1(v))$ formant une division harmonique (ici, $pr_1(v)$ est l'autre extrémité de la géodésique orthogonale à v). Réciproquement, un quadruplet de points du bord formant une division harmonique définit deux vecteurs opposés l'un de l'autre.

Proposition 8.1.9. *Cette identification conjugue l'action de $\pi_1(\Sigma)$ sur $T^1\Sigma$ et l'action diagonale sur $S_\infty^{(3)}$.*

Paramétrage du flot géodésique. Nous allons nous servir du lemme 8.1.4 pour paramétrer le flot géodésique. Soit $v \in T^1\mathbb{D}$. Nous pouvons alors lui associer le triplet $(pr_+(v), pr_0(v), pr_-(v))$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $pr_+(G_t(v)) = pr_+(v)$ et $pr_-(G_t(v)) = pr_-(v)$. Ainsi, $G_t(v)$ est déterminé par le point $pr_0(v) \in [pr_+(v), pr_-(v)]$. De plus, par le lemme 8.1.4, $t = \log[pr_+(v), pr_0(v), pr_-(v), pr_t(v)]$.

En résumé : suivre une géodésique à vitesse unité sur une distance t revient à se déplacer sur S_∞ entre deux points ξ^+ et ξ^- de sorte à avoir un quadruplet $\xi_+, \xi_0, \xi_t, \xi_+$ vérifiant $[\xi_+, \xi_0, \xi_-, \xi_t] = e^t$.

Définition 8.1.10. *Nous avons alors une application $pr_{0,*} : T^1\mathbb{D} \to TS_\infty$ induite par le flot géodésique, qui envoie le vecteur v sur le vecteur tangent au cercle basé en $\xi_0 = pr_0(v)$, et défini par :*

$$pr_{0,*}(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \xi_t,$$

où ξ_t a été défini par $[\xi_+, \xi_0, \xi_+, \xi_t] = e^t$.

Par exemple. Si nous envoyons par une homographie $pr_+(v)$ sur 0, $pr_0(v)$ sur 1 et $pr_-(v)$ sur ∞, et quenous poussons en avant le champ $pr_{0,*}$ par cette même homographie, nous obtenons exactement le champ radial $r\partial_r$ sur la demi-droite horizontale $(0,\infty)$, qui s'étend de façon naturelle en l'*unique* champ holomorphe sur $\mathbb{CP}^1$ s'annulant en 0, ∞, et coïncidant avec ∂_x en 1.

Équivalence orbitale. Lorsque nous avons deux métriques hyperboliques g_1 et g_2 sur Σ, nous pouvons, grâce à la correspondance au bord, obtenir une équivalence orbitale explicite entre les flots géodésiques correspondant.

Theorème 8.1.11. *L'application $H : S_\infty^{(3)} \to S_\infty^{(3)}$ définie par $H(\xi_+, \xi_0, \xi_-) = (h(\xi_+), h(\xi_0), h(\xi_-))$ induit une équivalence orbitale entre les flots géodésiques.*

Cette application passe au quotient et donne une équivalence orbitale entre les flots géodésiques g_t^1 et g_t^2.

Preuve. Puisque h préserve l'orientation, et par la description donnée précédemment du paramétrage du flot géodésique dans le modèle donné par $S_\infty^{(3)}$, l'application H fournit bien une équivalence orbitale.

Que l'application passe au quotient est une application directe de l'équivariance de la fonction h, et de ce que l'équivalence entre $T^1\mathbb{D}$ et $S_\infty^{(3)}$ conjugue les actions (par différentielle, et diagonale) de $\pi_1(S)$. ☐

Remarque.

1. Nous noterons de manière abusive $H : T^1\mathbb{D} \to T^1\mathbb{D}$ l'équivalence orbitale donnée par le théorème précédent.
2. Il est à noter que les images par H de deux vecteurs basés en le même point ne sont plus a priori basés en le même point. Néanmoins, le lemme suivant nous dit que les nouveaux points base sont uniformément proches.

Proposition 8.1.12. *Il existe un réel positif $C > 0$ tel que pour tout vecteur $v > 0$, le point base de $H(v)$ soit à distance $\leq C$ de l'image par H du point base de v.*

Preuve. Comme remarqué précédemment, nous pouvons associer à tout $v \in T^1\mathbb{D}$ un quadruplet de points du bord formant une division harmonique $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (pr_+(v), pr_0(v), pr_-(v), pr_1(v))$. Nous noterons x le point base de v.

Considérons le quadruplet image $(h(\xi_1), h(\xi_2), h(\xi_3), h(\xi_4))$. Il ne forme plus une division harmonique, donc le point d'intersection, que nous noterons y, des géodésiques $(h(\xi_1), h(\xi_3))$ et $(h(\xi_2), h(\xi_4))$ *n'est pas* le point base de $H(v)$, que nous noterons par ailleurs z. Nous allons raisonner en deux temps : en prouvant que y et $h(x)$ sont proches, puis en prouvant que y est proche de z.

Puisque l'angle selon lequel se coupent les deux géodésiques $(h(\xi_1), h(\xi_3))$ et $(h(\xi_2), h(\xi_4))$ est uniformément proche de $\pi/2$ (voir la proposition 8.1.8), l'intersection de leurs C_1-voisinages est uniformément compacte (c'est-à-dire incluse dans une boule de rayon uniformément majoré). Par le lemme 8.1.1, l'image $h(x)$ appartient précisément à cet intersection : il existe donc C_2 indépendant de v tel que $\mathrm{dist}(h(x), y) \leq C_2$.

Maintenant, par définition de H, le point base z de $H(v)$ est à l'intersection de la géodésique $(h(\xi_1), h(\xi_3))$ et de la géodésique orthogonale issue de ξ_2, de sorte que la distance $\mathrm{dist}(y, z)$ soit exactement la déviation par rapport à la division harmonique du quadruplet $(h(\xi_1), h(\xi_2), h(\xi_3), h(\xi_4))$. Par le lemme 8.1.8, cette distance est donc bornée par D. Cela conclut donc la preuve de la proposition. □

Reparamétrage moyen du flot géodésique. Nous pouvons alors définir le nombre dépendant de $v \in T^1\mathbb{D}$ et de $t \in \mathbb{R}$, $a(t, v) \in \mathbb{R}$ de la façon suivante. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $v \in T^1\mathbb{D}$. Nous définissons $a(t, v)$ comme le réel satisfaisant :

$$H \circ G_t(v) = G_{a(t,v)} \circ H(v).$$

Theorème 8.1.13. *Le nombre suivant existe Liouville-presque partout (pour la métrique g_1), et est indépendant de $v \in T^1\mathbb{D}$:*

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \frac{a(t, v)}{t} > 0$$

*Nous appellerons λ le **reparamétrage moyen du flot géodésique**.*

Preuve. Tout d'abord, puisque H est une équivalence orbitale, la fonction $a(t, v)$ est un cocycle additif : nous avons pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et $v \in T^1\mathbb{D}$:

$$a(t_1 + t_2, v) = a(t_1, G_{t_2(v)}) + a(t_2, v).$$

Cette application passe naturellement au quotient donnant ainsi un cocycle additif $a : \mathbb{R} \times T^1\Sigma \to \mathbb{R}$. À t fixé, cette application est bornée, et en particulier, puisque $T^1\Sigma$ est compacte, est Liouville-intégrable (pour la mesure de Liouville donnée par la métrique g_1). En effet, cela tient à ce que si x et x_t sont les points base de v et $G_t(v)$, nous avons $\mathrm{dist}(h(x), h(x_t)) \leq C_0 t$. D'autre part, par le lemme 8.1.12, les points bases de $H(v)$ et $H(G_t(v))$ sont uniformément proches de x et x_t respectivement. Ainsi donc, $a(t,v)$ est uniformément borné.

Nous pouvons alors appliquer un théorème ergodique additif de Birkhoff, ainsi que l'ergodicité de la mesure de Liouville, pour conclure l'existence presque sûre de la limite, ainsi que l'indépendance par rapport à v. □

Ce nombre apparaît dans le travail de Wolpert [W] comme étant la longueur moyenne d'une géodésique pour g_1 calculée avec la distance g_2. Il donne une preuve du théorème suivant (dûe originellement à Thurston) :

Theorème 8.1.14. *Soit g_1, g_2 deux métriques hyperboliques sur une même surface de Riemann compacte Σ. Le nombre λ est ≥ 1, avec égalité si et seulement si les deux métriques représentent le même point de l'espace de Teichmüller.*

2 | Reparamétrage moyen du flot géodésique et dimension de Hausdorff

2.1 – Calcul de la dimension de Hausdorff de la mesure donnée par la correspondance au bord

Soit g_1 et g_2 deux métriques hyperboliques sur la même surface de Riemann compacte Σ. Mostow a alors prouvé le résultat de rigidité suivant : la correspondance au bord est absolument continue si et seulement si c'est une homographie. En particulier, les métriques représentent alors le même point de l'espace de Teichmüller.

Nous allons prouver mieux que ça en calculant la dimension de Hausdorff de la mesure $h*(d\theta)$ (où $d\theta$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur le cercle à l'infini S_∞). Le théorème suivant est notre résultat principal.

Theorème 8.2.1. *Soit g_1 et g_2 deux métriques hyperboliques sur la même surface de Riemann compacte Σ. Soit $h : S_\infty \to S_\infty$ la correspondance au bord associée, et λ le reparamétrage moyen du flot géodésique. Alors nous avons :*

$$\mathrm{HD}[h*(d\theta)] = \frac{1}{\lambda},$$

HD *représentant la dimension de Hausdorff de la mesure. En particulier, lorsque g_1 et g_2 sont différentes, on a* $\mathrm{HD}[h*(d\theta)] < 1$.

L'idée de preuve est toute simple. Nous allons utiliser un théorème de Young : si pour $h*(d\theta)$-presque tout point $\xi \in S_\infty$ la limite $\log|h^{-1}(I_\varepsilon(\xi))|/\log\varepsilon$ existe, où $I_\varepsilon(\xi)$ est l'intervalle centré en ξ de taille ε (par définition, nous notons $|I_\varepsilon(\xi)|$ la taille, c'est-à-dire la longueur de l'arc I_ε), et est indépendante de ξ, alors la dimension de Hausdorff de $h*(d\theta)$ est égale à cette limite.

Il s'agit ensuite de raisonner ainsi. Un point typique pour $h*(d\theta)$ est l'image par h d'un point typique pour $d\theta$. Prenons donc l'image d'un point typique pour $d\theta$, et considérons un intervalle centré en ce point et de taille ε. Nous avons prouvé, dans la preuve du lemme 8.1.2 (nous prouvions alors que l'application h est Hölder continue), que la distance de l'origine à la géodésique dont les extrémités sont celles de l'arc I_ε est de l'ordre de $-\log\varepsilon$. De même le logarithme de la taille de $h^{-1}(I_\varepsilon)$ équivaut à la distance de l'origine à la géodésique dont les extrémités sont celles de l'arc $h^{-1}(I_\varepsilon)$.

Ainsi, la dimension de Hausdorff s'obtient en prenant la limite du rapport entre ces deux distances. Comme le reparamétrage du flot géodésique s'obtient presque partout en multipliant les grandes distances par λ, le quotient précédent devrait tendre vers $1/\lambda$. Sauf que bien sûr, l'application h n'envoie pas géodésique sur géodésique, et ne préserve pas les divisions harmoniques : nous aurons besoin pour rendre cet argument rigoureux des lemmes géométriques précédents.

Dimension de mesures. Nous ne rappelons pas la définition formelle de la dimension de Hausdorff d'une partie d'un espace métrique : pour la définition précise, nous renvoyons le lecteur à l'article de Young [Y].

Définition 8.2.2. *La dimension de Hausdorff d'une mesure de probabilité borélienne m sur un espace métrique compact X est définie comme :*

$$\mathrm{HD}(m) = \operatorname*{Inf}_{Y\subset X,\, m(Y)=1} \mathrm{HD}(Y).$$

Young a alors prouvé dans [Y] le théorème suivant :

Theorème 8.2.3. *Soit m une mesure de probabilité borélienne sur un espace métrique X. Supposons que le nombre suivant existe m-presque partout :*

$$\dim(m) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log m(B(x,\varepsilon))}{\log\varepsilon}.$$

Alors on a $\dim(m) = \mathrm{HD}(m)$.

2.2 – Preuve du théorème 8.2.1

Un lemme clé. Le lemme suivant est l'ingrédient technique principal nécessaire à la preuve du théorème 8.2.1.

Lemme 8.2.4. *Soit $I\subset S_\infty$ un arc de cercle, et c la géodésique passant par 0 et coupant orthogonalement celle dont les extrémités sont celles de I. Nous appelons x_0 le point d'intersection, $D = \mathrm{dist}(0, x_0)$, et v le vecteur basé en 0 pointant vers x_0.*

Alors il existe une constante $K > 0$, indépendante du choix de I, telle que $a(D, v)$ soit K-proche de la distance de l'origine à l'intervalle $h(I)$.

Nous prouverons plus tard ce lemme.

Preuve du théorème à partir du lemme clé. La preuve ici reprend très exactement l'idée que nous avions suggérée au début du paragraphe : le lemme clé 8.2.4 est l'argument géométrique qui permettait de conclure cet argument.

Soit $\xi \in S_\infty$ typique pour $d\theta$, et I un intervalle de taille $\eta > 0$ centré en ξ. Soit $v = v_{0,\xi}$, le vecteur basé en o et pointant vers ξ, et soit D la distance de l'origine à l'intervalle I : nous savons que lorsque η tend vers zéro :

$$D \sim -\log\eta.$$

Le point ξ ayant été choisi typique, nous pouvons supposer, par le théorème 8.1.13 que, lorsque D croît indéfiniment :

$$a(D, v) \sim \lambda D.$$

Notons D' la distance de l'origine à l'intervalle $h(I)$. Nous savons, par le lemme 8.2.4, que la différence $a(D,v)-D'$ est bornée indépendamment de l'intervalle I, et en particulier, indépendamment de $D \sim -\log|I|$. Nous avons donc, lorsque D croît indéfiniment :

$$\frac{D}{D'} \sim \frac{1}{\lambda}.$$

Nous pouvons à présent conclure : si J est un intervalle centré en $h(\xi)$, où ξ est typique pour $d\theta$, et si $\varepsilon = |J|$, on obtient $D' \sim -\log\varepsilon$. Nous avons de plus $D \sim -\log|h^{-1}(J)|$, et donc nous avons, pour $d\theta$-presque tout $\xi \in S_\infty$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log|h^{-1}(J)|}{\log\varepsilon} = \frac{1}{\lambda}.$$

En utilisant le théorème de Young 8.2.3, il vient que le nombre $\dim[h*(d\theta)]$ existe donc et est égal à la dimension de Hausdorff $\mathrm{HD}[h*(d\theta)]$. CQFD. □

Preuve du lemme clé. Reste alors à prouver notre lemme 8.2.4. Soit donc $I=[a,b]$ ($a<b$ dans l'ordre trigonométrique) un intervalle de S_∞, dont la taille est appelée à tendre vers zéro, centré en un point $\xi \in S_\infty$. Considérons le vecteur $v = v_{0,\xi}$ basé en 0 et pointant vers ξ, ainsi que D la distance de 0 à la géodésique (a,b).

Nous notons $c=(\xi,\xi')$ la géodésique issue de ξ et passant par l'origine : elle est orthogonale à (a,b), de sorte que le quadruplet (a,ξ,b,ξ') forme une division harmonique. Si (a',b') est la géodésique orthogonale à c en 0, de sorte que $a'<\xi<b'$, le quadruplet (a',ξ,b',ξ') forme aussi une division harmonique.

Nous savons par la proposition 8.1.12, que, puisque nous avons fait le choix d'une fonction h préservant l'origine, le point base de v, que l'on note x, est à distance $\leq C$ de l'origine.

Soit alors y_0 la projection orthogonale de 0 sur $(h(a),h(b))$, y_1 celle de x, et y l'intersection des géodésiques $(h(a),h(b))$ et $h(c)$. Nous avons alors :

Lemme 8.2.5. *La distance* $\mathrm{dist}(y_0,y_1)$ *est majorée par une constante* C' *indépendante de l'intervalle* I.

Preuve. Nous utilisons l'inégalité triangulaire : $\mathrm{dist}(y_0,y_1) \leq \mathrm{dist}(y_0,y)+\mathrm{dist}(y_1,y)$.

D'une part, la distance $\mathrm{dist}(y_1,y)$ est la déviation par rapport à la division harmonique du quadruplet $(h(a),h(\xi),h(b),h(\xi'))$: par la proposition 8.1.8, elle est majorée par une constante uniforme.

D'autre part, la projection orthogonale sur $h(a,b)$ est une projection : distance $\mathrm{dist}(y,y_0)$ est ainsi inférieure à la distance $\mathrm{dist}(0,x)$, qui elle, est uniformément bornée indépendamment de I.

Ainsi, nous pouvons conlure la preuve du lemme. □

Lemme 8.2.6. *Soit* y' *le point base de* $H(G_D(v))$. *Alors, il existe une constante* C'' *indépendante de* I *telle que* $\mathrm{dist}(y_0,y')$ *soit majorée par* C''.

Preuve. Nous avons par définition $pr_+(G_D(v))=\xi'$, $pr_0(G_D(v))=a$ et $pr_-(G_D(v))=\xi$, de sorte que y est à l'intersection des géodésiques $(h(\xi'),h(\xi))$ et de l'orthogonale à cette dernière issue de $h(a)$.

La distance $\mathrm{dist}(y_1,y')$ se réalise alors comme la déviation du quadruplet $(h(\xi'),h(a),h(\xi),h(b))$ par rapport à la division harmonique. Une nouvelle utilisation de la proposition 8.1.8 nous dit donc que cette distance est bornée indépendamment de I. Puisque, par l'inégalité triangulaire, $\mathrm{dist}(y_0,y') \leq \mathrm{dist}(y_0,y_1)+\mathrm{dist}(y_1,y')$, nous pouvons, en utilisant le lemme précédent 8.2.5, conclure la preuve du lemme. □

Fin de la preuve du lemme clé. Une ultime utilisation de l'inégalité triangulaire nous permet de conclure la preuve du lemme clé. Nous avons par définition $a(D,v) = \text{dist}(x, y')$. Ainsi, $|a(D,v) - \text{dist}(0, y_0)| \leq \text{dist}(0,x) + \text{dist}(y_0, y')$ est, par ce qui précède, borné indépendamment de la taille de I. Cela nous permet donc de conclure la preuve de lemme 8.2.4, et donc celle du théorème 8.2.1. □

3 | Représentations fuchsiennes et quasi-fuchsiennes

3.1 – Feuilletage associé à la représentation canonique d'un groupe de surface

Représentation canonique. Nous avons vu que lorsque Σ est une surface de Riemann compacte munie d'une métrique hyperbolique g, elle peut être uniformisée par la donnée d'un sous-groupe $\Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{D})$ isomorphe au groupe de surface $\pi_1(\Sigma)$.

La *représentation canonique* pour la métrique g est l'isomorphisme $\rho : \pi_1(\Sigma) \to \Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$. C'est une représentation fuchsienne car il existe un cercle invariant par tout élément de l'image Γ.

En suspendant cette représentation, on obtient un fibré feuilleté en sphères au dessus de Σ, que l'on appelle le feuilletage canonique. Nous remontons la métrique g aux feuilles via la fibration.

Trivialisation. Nous voulons discuter du flot géodésique tangent au feuilletage canonique. L'intuition que nous voulons rendre rigoureuse est que ce flot se comporte dans les fibres comme une dynamique Nord-Sud holomorphe. Pour ce faire, nous allons rappeler la trivialisation du fibré $D\Pi : T^1\mathscr{F} \to T^1\Sigma$ effectuée dans l'article de Bonatti, Gómez-Mont et Vila, [BGVil].

Nous avons $S_\infty \subset \mathbb{CP}^1$: il est ainsi possible de définir trois sections $T^1\mathbb{D} \to T^1\mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$
- la section de Lyapunov maximale $\tilde{\sigma}^+ = (Id, pr_+)$;
- la section de Lyapunov minimale $\tilde{\sigma}^- = (Id, pr_-)$;
- le plongement du flot géodésique $\tilde{\sigma}^0 = (Id, pr_0)$.

Nous obtenons assez facilement la proposition suivante, à partir des propriétés déjà énoncées des fonctions $pr_\star$:

Proposition 8.3.1. *Les sections définies précédemment vérifient :*

1. *elles sont deux à deux disjointes ;*
2. *pour $\star = +, -, 0$, $\tilde{\sigma}^\star$ est une équivariance pour les actions sur $T^1\mathbb{D}$ par différentielles de transformations de revêtements, et sur $T^1\mathbb{D} \times \mathbb{C}_P P^1$ par l'action diagonale ;*
3. *$\tilde{\sigma}^+$ et $\tilde{\sigma}^-$ commutent avec les flots géodésiques ;*
4. *$\tilde{\sigma}^+$ commute avec les feuilletages instables, et $\tilde{\sigma}^-$, avec les feuilletages stables.*

Ainsi, les trois sections passent-elles au quotient, et donnent trois sections $\sigma^\star$, $\star = +, -, 0$. Les sections σ^+ et σ^- sont les sections de Lyapunov données presque partout par le théorème d'Oseledets.

Corollaire 8.3.2. *Il existe une trivialisation $\Phi : T^1\mathscr{F} \to T^1\Sigma \times \mathbb{CP}^1$ qui envoie σ^+ sur ∞, σ^- sur 0 et σ^0 sur 1.*

Remarque. Nous pouvons posser en arrière par cette trivialisation la métrique de Fubini-Study dans les fibres, de sorte que cette trivialisation soit une isométrie fibre à fibre. Nous avons ainsi une métrique Riemannienne sur $T^1\mathscr{F}$ de sorte que les fibres et les feuilles se coupent orthogonalement.

Composantes verticale et horizontale du flot géodésique feuilleté. Nous notons $\widetilde{X}$ le champ de vecteur engendré par le flot géodésique tangent aux feuilles de $T^1\mathbb{D}\times\mathbb{CP}^1$. Lorsque $v\in T^1\mathbb{D}$, il existe un unique champ de vecteurs holomorphe sur $\mathbb{CP}^1$ noté Y_v, tel que :

– $Y_v(pr_\pm(v))=0$
– $Y_v(pr_0(v))=pr_{0,*}(v)$ (voir la définition 8.1.10).

Comme nous l'avons vu lorsque nous paramétrions le flot géodésique dans le modèle $T^1\mathbb{D}\simeq S^{(3)}_\infty$, ce flot Y_v est exactement le tiré en arrière du flot radial $r\partial_r$ par l'homographie envoyant $pr_+(v)$ sur 0, $pr_0(v)$ sur 1 et $pr_-(v)$ sur ∞.

Cela nous permet de définir un champ de vecteurs holomorphe sur $T^1\mathbb{D}\times\mathbb{CP}^1$ tangent aux fibres, qui engendre un flot Nord-Sud $\widetilde{Y}:(v,z)\in T^1\mathbb{D}\times\mathbb{CP}^1\mapsto(v,Y_v(z))$. Nous avons le lemme suivant, prouvé dans [BGVil] (nous reproduisons ci-dessous l'argument) :

Lemme 8.3.3. *Le champ $\widetilde{Y}$ est invariant par l'action diagonale de Γ, et commute avec le flot géodésique.*

Preuve. Lorsque nous les avons définies, nous avons vues que les applications $pr_\star$, $\star=+,-,0$ étaient Γ-équivariantes. Il en est de même pour le champ $pr_{0,*}$, par définition, et puisque le flot géodésique commute à l'action de Γ. Ainsi, $\widetilde{Y}$ passe au quotient.

Pour voir que $\widetilde{Y}$ commute avec le flot géodésique, il nous suffit de prouver que lorsque $v\in T^1\mathbb{D}$, et $t\in\mathbb{R}$, on a $Y_v=Y_{G_t(v)}$.

Une autre façon de voir Y_v, est la suivante : c'est l'unique extension holomorphe à $\mathbb{CP}^1$ du champ de vecteur sur l'arc $(pr_+(v),pr_-(v))$ qui est induit par le flot géodésique : c'est -à-dire $pr_{0,*}(G_t(v))$: ce champ de vecteur ne dépend donc que de l'orbite de v : en particulier $Y_v=Y_{G_t(v)}$. □

Lemme 8.3.4. *Soit $\widetilde{Z}=\widetilde{X}+\widetilde{Y}$. Alors $\widetilde{Z}$ est invariant par l'action de Γ, holomorphe, envoie fibres sur fibres et commute avec les trois sections $\widetilde{\sigma}^+$, $\widetilde{\sigma}^-$ et $\widetilde{\sigma}^0$*

Preuve. L'invariance est immédiate, puisque c'est la somme de deux champs de vecteurs invariants par l'action de Γ. De même, le fait qu'il soit holomorphe et préserve les fibres est immédiat car c'est le cas de $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$.

Nous savons que pour tout $v\in T^1\mathbb{D}$, $\widetilde{Y}(\widetilde{\sigma}^\pm(v))=0$ et que $\widetilde{X}$ commute avec $\widetilde{\sigma}^\pm$: ainsi, $\widetilde{Z}$ commute avec $\widetilde{\sigma}^\pm$.

Appelons $\widetilde{Y}_t$ le flot engendré par $\widetilde{Y}$, et $\widetilde{Z}_t$ celui $\widetilde{Z}$. Par définition, $\widetilde{Y}_t(\sigma^0(v))=(v,pr^0(G_t(v)))$, et $G_t(\sigma^0(v))=(G_t(v),pr_0(v))$. Puisque $\widetilde{Y}$ commute avec $\widetilde{X}$ on a $\widetilde{Z}_t=\widetilde{Y}_t\circ G_t$, donc :

$$\widetilde{Z}_t(\sigma^0(v))=(G_t(v),pr^0(G_t(v)))=\sigma^0(G_t(v)),$$

et $\widetilde{Z}$ commute avec la section $\widetilde{\sigma}^0$. □

Corollaire 8.3.5. *Appelons Y et Z les champs de vecteurs définis sur $T^1\mathscr{F}$ par passage au quotient, ainsi que Y_t, Z_t les flots qu'ils engendrent. Alors nous avons pour tout $t\in\mathbb{R}$, $G_t=Y_{-t}\circ Z_t$. Nous appelons Y et Z respectivement les composantes verticale et horizontale du flot géodésique feuilleté.*

Exposant de Lyapunov transverse. Nous allons définir la notion d'exposant de Lyapunov transverse. Lorsque $|.|$ est une métrique transverse compatible à la structure conforme des fibres $\mathbb{CP}^1$, et μ est une mesure invariante ergodique par le flot géodésque feuilleté, nous pouvons définir le nombre suivant μ presque partout :

$$\chi^{\pitchfork}(\mu)=\lim_{t\to\infty}\frac{\log|D\tau_{g_{[0,t]}(v)}|}{t},$$

où l'on rappele que $\tau_{g_{[0,t]}(v)}$ représente la transformation d'holonomie au dessus du chemin d'orbite $g_{[0,t]}(v)$, qui est vue comme un biholomorphisme de la sphère $\mathbb{CP}^1$.

L'existence de la limite découle du théorème ergodique sous-additif, et par compacité de la sphère, elle ne dépend pas de la métrique transverse $|.|$ choisie. Nous proposons ci-dessous de calculer l'exposant de Lyapunov transverse du flot géodésique feuilleté pour le mesure SRB dans le cas de la représentation canonique d'un groupe de surface.

Rappelons-nous que nous avons défini une trivialisation de la fibration $D\Pi : T^1\mathscr{F} \to T^1\Sigma$ en envoyant les trois sections σ^+, σ^0, σ^- respectivement sur ∞, 1 et 0, et que nous avons tiré en arrière par cette fibration la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{CP}^1$, définissant ainsi une métrique Riemannienne sur $T^1\mathscr{F}$. Nous allons nous intéresser ici à l'exposant de Lyapunov transverse du flot géodésique pour l'unique mesure SRB du flot géodésique, dont on rappelle qu'elle est définie par l'image de la mesure de Liouville par σ^+.

Lemme 8.3.6. *Pour la métrique Riemannienne définie ci-dessus, le flot Z_t induit une isométrie fibre à fibre.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du lemme 8.3.4. En effet, ce flot commute avec les trois sections. C'est donc que, dans la trivialisation, il préserve les sections $T^1\Sigma \times \{\infty\}$, $T^1\Sigma \times \{1\}$, et $T^1\Sigma \times \{0\}$: l'application fibre à fibre induite est un biholomorphisme de $\mathbb{CP}^1$ préservant 0, 1 et ∞ : ça ne peut être que l'identité. En particulier, c'est une isométrie. □

Lemme 8.3.7. *Le poussé en avant de flot Y_{-t} par la trivialisation coïncide avec le flot $(t, z) \mapsto e^t z$*

Preuve. Nous avons vu que le champ Y_v était le tiré en arrière du champ radial $r\partial_r$ par l'homographie envoyant $pr^+(v)$ sur 0, $pr^0(v)$ sur 1, et $pr^-(v)$ sur ∞. Le lemme s'en déduit de façon immédiate. □

Theorème 8.3.8. *Soit Σ une surface compacte hyperbolique, et $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ le fibré feuilleté obtenu en suspendant la représentation canonique. Alors l'exposant de Lyapunov transverse du flot géodésique feuilleté pour la mesure SRB est égal à -1.*

Preuve. Nous utilisons le corollaire 8.3.5 : nous pouvons décomposer le flot géodésique feuilleté en une composante horizontale, et une composante verticale $G_t = Y_{-t} \circ Z_t$. Par le lemme 8.3.6, Z induit une isométrie fibre à fibre. Par le lemme 8.3.7, Y induit l'homothétie $z \mapsto e^t z$ dans les fibres.

La mesure SRB du flot géodésique a été définie en poussant la mesure de Liouville par la section de Lyapunov σ^+. Ainsi, un point typique s'écrit $\sigma^+(v)$: et l'exposant de Lyapunov transverse en un tel point est donné par l'exposant de Lyapunov du flot $z \mapsto e^t z$ en $z = \infty$. Cet exposant est bien sûr égal à -1. □

3.2 – Exposant de Lyapunov et dimension de Hausdorff transverses dans le cas fuchsien

Représentations fuchsiennes. Soit Σ une surface de Riemann compacte et de genre ≥ 2. Considérons deux métriques hyperboliques g_1 et g_2, sur Σ, qui peuvent être uniformisées par deux copies $\Gamma_1, \Gamma_2 < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$ du groupe $\pi_1(\Sigma)$. La *représentation fuchsienne* associée est donnée par l'isomorphisme :

$$\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2 < PSL_2(\mathbb{C}).$$

Nous considérons alors le feuilletage obtenu par suspension de cette représentation, c'est à dire en prenant le quotient de $D \times \mathbb{CP}^1$ par $(x, z) \sim (\gamma x, \rho(\gamma) z)$, $\gamma \in \Gamma_1$. Ici encore, ce feuilletage a une famille de cercles dans les fibres invariante par l'action du groupe d'holonomie.

La différence par rapport à la représentation canonique est que l'on a reparamétré les feuilles du feuilletage, tout en gardant le même groupe d'holonomie : par conséquent le flot géodésique feuilleté est obtenu par reparamétrage de celui du feuilletage canonique.

Sections équivariantes. La correspondance au bord définie précédemment nous servira à écrire l'équivalence orbitale entre les flots géodésiques tangents aux feuilletages fuchsiens.

Nous pouvons alors définir trois sections grâce à la correspondance au bord $h : S_\infty \to S_\infty$, qui, on le rappelle, conjugue les actions de Γ_1 et Γ_2 sur $S_\infty \subset \mathbb{CP}^1$:
- la section de Lyapunov maximale $\tilde{\sigma}^+ = (Id, pr_+ \circ h)$;
- la section de Lyapunov minimale $\tilde{\sigma}^- = (Id, pr_- \circ h)$;
- le plongement du flot géodésique $\tilde{\sigma}^0 = (Id, pr_0 \circ h)$.

Proposition 8.3.9. *Les sections définies précédemment vérifient :*

1. *elles sont deux à deux disjointes ;*
2. *pour $\star = +, -, 0$, $\tilde{\sigma}^\star$ passent au quotient pour l'action diagonale donnée par $(D\gamma, \rho(\gamma))$, $\gamma \in \Gamma_1$;*
3. *$\tilde{\sigma}^+$ et $\tilde{\sigma}^-$ commutent avec les flots géodésiques ;*
4. *$\tilde{\sigma}^+$ commute avec les feuilletages instables, et $\tilde{\sigma}^-$, avec les feuilletages stables.*

Les passages au quotient sont notés $\sigma^\star$, pour $\star = +, -, 0$. Ici encore, les sections σ^+ et σ^- sont les sections de Lyapunov définies presque partout par le théorème d'Oseledets.

Équivalence orbitale. Nous avions défini, grâce à la correspondance au bord, une équivalence orbitale des flots géodésiques : voir le théorème 8.1.11. Cette équivalence orbitale conjugue les actions par différentielle sur $T^1\mathbb{D}$ des groupes Γ_1 et Γ_2. Par conséquent, nous avons la proposition suivante :

Proposition 8.3.10. *Soit Σ une surface de Riemann de genre ≥ 2, et Γ_1, Γ_2 deux copies de $\pi_1(\Sigma)$ dans* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$. *Considérons l'équivalence orbitale $H : T^1\mathbb{D} \to T^1\mathbb{D}$ définie par le théorème 8.1.11. Nous considérons les actions diagonales sur $T^1\mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$ données par $(D\gamma, \rho(\gamma))$ et $(D\rho(\gamma), \rho(\gamma))$, pour $\gamma \in \Gamma_1$. Alors l'aplication $(H, Id) : T^1\mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1 \to T^1\mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$:*

1. *conjugue ces deux actions ;*
2. *descend en une équivalence orbitale entre les flots géodésiques feuilletés pour la suspension de ρ, et pour la suspension de la représentation canonique associée à Γ_2.*

Preuve. L'application (H, Id) conjugue les deux actions diagonales puisque, par définition, H conjugue les actions de Γ_1 et Γ_2 sur $T^1\mathbb{D}$. Ainsi cette application descend au quotient en une équivalence orbitale des flots géodésiques feuilletés, puisque H est une équivalence entre les flots géodésiques, et puisque les flots feuilletés préservent les feuilles de $(T^1\mathbb{D} \times \{z\})_{z \in \mathbb{CP}^1}$. □

Si $\mathscr{F}_{can}$ désigne le feuilletage canonique défini par suspension de la représentation canonique de Γ_2, et G_t^{can}, le flot géodésique feuilleté correspondant, il existe donc $\overline{H} : T^1\mathscr{F} \to T^1\mathscr{F}_{can}$ satisfaisant, pour tout $v \in T^1\mathscr{F}$:

$$G_t = \overline{H}^{-1} \circ G_{a(t,v)}^{can} \circ \overline{H}. \tag{8.3.2}$$

Exposant de Lyapunov transverse. Nous rappelons que le reparamétrage moyen du flot géodésique lorsque l'on passe de la métrique g_1 à la métrique g_2 est défini presque partout pour la mesure de Liouville de g_1 par $\lambda = \lim a(t, v)/t$. Nous allons alors prouver :

Theorème 8.3.11. *Soit g_1 et g_2 deux métriques hyperboliques sur une surface de Riemann compacte Σ. Le fibré feuilleté obtenu par suspension de l'isomorphisme entre les groupes uniformisants $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2 < PSL_2(\mathbb{C})$ est noté $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$. Alors l'exposant de Lyapunov transverse du flot géodésique pour la mesure SRB est égal à l'opposé du reparamétrage moyen des flots géodésiques lorsque l'on passe de la métrique g_1 à la métrique g_2.*

Preuve. Nous pouvons encore trivialiser le fibré $\Pi : T^1\mathscr{F} \to T^1\Sigma$ en envoyant respectivement les sections σ^+, σ^0, σ^- sur ∞, 1 et 0 par une homographie. Nous obtenons, en tirant en arrière la métrique de Fubini-Study, une métrique transverse compatible à la structure conforme des fibres, mais qui ne varie que de façon Hölder avec la fibre.

Quoi qu'il en soit, l'exposant de Lyapunov ne dépendant pas de la métrique transverse, nous pouvons calculer l'exposant dans cette trivialisation.

La mesure SRB est égale ici encore à l'image de la mesure de Liouville pour g_1 par σ^+, de sorte qu'il suffit, par la relation d'équivalence orbitale 8.3.2, calculer l'exposant transverse de $Y_{-a(t,v)}Z_{a(t,v)}$ dans la trivialisation en ∞.

Cet exposant est ainsi la limite presque sûre de $-a(t,v)/t$. C'est donc par définition l'opposé du reparamétrage moyen des flots géodésiques. □

Dimension transverse de la mesure harmonique. Nous savons par le théorème 7.1.32, que si m est l'unique mesure harmonique pour $\mathscr{F}$, les mesures conditionnelles sont données par $s_p^+ * \mathrm{Leb}_{T_p^1\Sigma}$, où s_p^+ est la section $T_p^1\Sigma \to V_p \simeq \mathbb{CP}^1$ donnée par la section de Lyapunov, qui est un plongement.

En d'autres termes, la mesure conditionnelle sur la fibre de l'unique mesure harmonique est donnée par $h * (d\theta)$, où h est la correspondance au bord des surfaces Riemanniennes (Σ, g_1) et (Σ, g_2).

Nous appelons *dimension transverse* de la mesure harmonique, la dimension de Hausdorff des mesures conditionnelles dans les fibres. Nous avons donc, en appliquant le théorème 8.2.3 :

Theorème 8.3.12. *Soit g_1 et g_2 deux métriques hyperboliques sur une même surface de Riemann compacte Σ. Soit $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ le fibré feuilleté obtenu par suspension de l'isomorphisme des groupes uniformisants $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2 < PSL_2(\mathbb{C})$. Alors la dimension transverse de la mesure harmonique est donnée par λ^{-1}, où λ est le reparamétrage moyen des flots géoédésiques lorsqu'on passe de la métrique g_1 à la métrique g_2.*

En particulier :

Corollaire 8.3.13. *Soit g_1 et g_2 deux métriques hyperboliques sur une même surface de Riemann compacte Σ. Soit $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ le fibré feuilleté obtenu par suspension de l'isomorphisme des groupes uniformisants $\rho : \Gamma_1 \to \Gamma_2 < PSL_2(\mathbb{C})$. Alors nous avons la formule suivante :*

1=*(dimension transverse de la mesure harmonique)*× |*exposant de Lyapunov transverse de la mesure SRB*|.

3.3 – Mesures singulières pour les représentations quasi-fuchsiennes

Dans ce qui suit Σ sera une surface de Riemann compacte de genre ≥ 2 munie d'une métrique à courbure négative, plus nécessairement constante. Nous noterons $\widetilde{\Sigma}$ son revêtement universel Riemannien, et $\Sigma(\infty)$ le cercle à l'infini C^1 correspondant. Nous avons un sous groupe uniformisant $\Gamma_0 < \mathrm{Isom}^+(\widetilde{\Sigma})$ isomorphe à $\pi_1(\Sigma)$. Nous réserverons la notation $\mathbb{D}$ pour le disque hyperbolique, et S_∞ pour le cercle à l'infini de celui-ci.

Représentations quasi-fuchsiennes. L'uniformisation simultanée de Bers (see [Be]) nous permet de considérer un ensemble de représentations fidèles et discrètes $\rho : \pi_1(\Sigma) \to PSL_2(\mathbb{C})$ qui est, à conjugaison par un élément de $PSL_2(\mathbb{C})$ près, paramétré par les couples de points de l'espace de Teichmüller de la surface de Riemann Σ.

Soit deux métriques hyperboliques g_- et g_+ sur Σ : elles peuvent être uniformisées par des copies du groupe de Σ, Γ_- et Γ_+, qui sont des sous-groupes de $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$. Par un théorème de Bers, il existe :

– un sous groupe discret $\Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$ qui laisse invariante une courbe de Jordan Λ, ainsi que les deux composantes connexes D_+ et D_- de $\mathbb{CP}^1 \setminus \Lambda$;
– deux fonctions analytiques des hémisphères nord et sud $H_\pm : \mathbb{D} \to D_\pm$ qui conjuguent les actions de $\Gamma_\pm$ et de Γ. En particulier, Γ est isomorphe à $\pi_1(\Sigma)$;
– $H_\pm$ s'étendent en deux applications $\mathbb{D} \cup S_\infty \to D_\pm \cup \Lambda$ qui sont équivariantes. En particulier, $(H_-)^{-1} \circ H_+ : S_\infty \to S_\infty$ est une correspondance au bord entre (Σ, g_+) et (Σ, g_-).

Ces objets sont uniquement définis à conjugaison près par un élément de $PSL_2(\mathbb{C})$. Bowen a prouvé dans [Bo3] que Λ est soit un cercle géométrique, ou il a une dimension de Hausdorff > 1. Dans le premier cas, $H_\pm$ appartiennent à $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$, de sorte que Γ_+ et Γ_- soient conjuguées par une isométrie du disque, de sorte que les métriques g_+ et g_- représentent le même point de l'espace de Teichmüller : c'est le cas fuchsien que nous avons décrit précédemment.

Soit maintenant un tel groupe Γ : il vient avec les objets $\Gamma_\pm, \Lambda$ et $H_\pm$ décrits ci-dessus. Comme nous l'avons fait en tout début de chapitre, nous pouvons définir deux correspondances au bord $h_\pm : \Sigma(\infty) \to S_\infty$ conjuguant les actions de Γ_0 et $\Gamma_\pm$. Puisque ces objets ne sont bien définis qu'à conjugaison près, nous pouvons supposer que les deux correspondances au bord entre (Σ, g_+) et (Σ, g_-) $h_- \circ (h_+)^{-1}$ et $(H_-)^{-1} \circ H^+$ coïncident, (nous avons alors $H_+ \circ h_+ = H_- \circ h_-$). Considérons alors la *représentation quasi-fuchsienne* :

$$\rho : \pi_1(\Sigma) \to \Gamma.$$

Nous pouvons la suspendre et remonter aux feuilles la métrique de Σ, poour ainsi obtenir deux fibrés feuilletés $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^1 \mathscr{F})$ et $(D\Pi, T^1\mathscr{F}, T^1\Sigma, \mathbb{CP}^1 \widehat{\mathscr{F}})$ avec pour holonomie ρ. Il n'y a pas de mesure invariante par holonomie, car Γ se réalise comme un groupe kleinéen non élémentaire.

Nous pouvons alors, comme précédemment, définir trois sections équivariantes, pour $\star = +, -, 0$:

$$\widetilde{\sigma}^\star = (Id, \widetilde{s}^\star) : T^1\widetilde{\Sigma} \to T^1\widetilde{\Sigma} \times \mathbb{CP}^1,$$

où :

$$\widetilde{s}^\star = H_+ \circ h_+ \circ pr_\star = H_- \circ h_- \circ pr_\star : T^1\widetilde{\Sigma} \to \mathbb{CP}^1$$

Les passages au quotient σ^+ et σ^-, commutent avec le flots et σ^+, (resp. σ^-), commute avec le feuilletage instable (resp. stable) : ce sont les deux sections de Lyapunov.

Description des mesures. Soit $F : T^1\Sigma \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder. Supposons que

$$\rho : \pi_1(\Sigma) \to \Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$$

soit une représentation quasi-fuchsienne, que l'on suspend, pour ainsi obtenir deux fibrés feuilletés d'holonomie donnée par ρ : $(\Pi, M, B, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ et $(D\Pi, T^1\mathscr{F}, T^1\Sigma, \mathbb{CP}^1, \widehat{\mathscr{F}})$. Par le théorème 7.1.29, il existe une unique mesure F-harmonique pour $\mathscr{F}$.

Nous voulons comparer ces mesures pour différents potentiels F. Puisqu'elles se projettent toutes sur une mesure équivalente à Lebesgue, il suffit de comparer les mesures conditionnelles. Nous savons, par le théorème 7.1.32, que celles-ci sont équivalentes à $s_p^+ * \omega_p^F$, où $(\omega_p^F)_{p \in B}$ est la famille des mesures de Ledrappier sur les fibres unitaires tangentes $T_p^1\Sigma$, et $s_p^+ : T_p^1\Sigma \to V_p$ est la transformation induite par la section de Lyapunov : c'est un homéomorphisme bihölder sur son image, qui s'identifie à la courbe de Jordan Λ.

Nous nous intéressons à trois cas particuliers de classes de mesures sur les fibres unitaires tangentes qui sont :

– la classe harmonique, qui décrit le comportement des chemins Browniens ;
– la classe de Lebesgue, qui décrit le comportement de presque toute geodesique ;

– la classe de Patterson-Sullivan qui décrit l'accumulation à l'infini des orbites $\pi_1(B)o$.

Une combinaison des travaux de Katok et Ledrappier (voir [Ka1, Ka2, L3]), entraîne alors que :

Theorème 8.3.14 (Katok, Ledrappier)**.** *La courbure de* (Σ, g_0) *est constante si et seulement si deux des trois classes de mesures ci-dessus coïncident. Dans ce cas, les trois classes de mesures sont les mêmes.*

En utilisant ce qui précède (en particulier que s_p^+ est un homéomorphisme pour tout p), nous obtenons le théorème suivant :

Theorème 8.3.15. *Soit* $(\Pi, M, \Sigma, \mathbb{CP}^1, \mathscr{F})$ *un fibré feuilleté obtenu en suspendant une représentation fuchsienne ou quasi-fuchsienne d'un groupe de surface compacte de genre* ≥ 2. *Supposons de plus que la courbure de* Σ *soit variable. Alors la mesure harmonique, la projection de la mesure SRB, et la limite des grands disques sont deux-à-deux mutuellement singulières..*

Bibliographie

[AR] F.Alcalde Cuesta, A.Rechtman, Averaging sequences, *Pac. J. of Math.*, **255**, (2012), 1-23.

[Al] S.Alvarez, Discretization of harmonic measures for foliated bundles, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I.*, **350**, (2012), 621-626.

[An] D.Anosov, Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature, *Proc. Steklov Math. Inst. A.M.S Transl.*, (1969).

[AS] M.T.Anderson, R.Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, *Ann. of Math.*, **121**, (1985), 429-461.

[ASi] D.Anosov, Ya.Sinai, Certain smooth ergodic systems, *Russian Math. Surveys,* **22**, (1967), 103-167.

[BL] M.Babillot, F.Ledrappier, Geodesic paths and horocycle flows on abelian covers, *Lie Groups and ergodic theory (Mumbai, 1996)*, in Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math, **14**, (1998), 1-32.

[BMar] Y.Bakhtin, M.Martínez, A characterization of harmonic measures on laminations by hyperbolic Riemann surfaces, *Ann. I. H.Poincaré. Prob. Stat.*, **44**, (2008), 1078-1089.

[Ba] W.Ballmann, *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. With an appendix by Misha Brin.

[BaL] W.Ballmann, F.Ledrappier, Discretization of positive harmonic functions on Riemannian manifolds and Martin boundary, *Actes de la Table Ronde de la Géométrie Différentielle (Luminy 1992), Sémin. Congr.*, **1**, Soc. Math. Fr., Paris, (1996), 77-92.

[Be] L.Bers, Simultaneous Uniformization, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66**, (1960), 94-97.

[BDV] C.Bonatti, L.Díaz, M.Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 102. Mathematical Physics, III. Springer Verlag, 2005.

[BG] C.Bonatti, X.Gómez-Mont, Sur le comportement statistique des feuilles de certains feuilletages holomorphes, *Monogr. Enseign. Math.*, **38**, (2001), 15-41.

[BGM] C.Bonatti, X.Gómez-Mont, M.Martínez, Foliated hyperbolicity, preprint.

[BGV] C.Bonatti, X.Gómez-Mont, M.Viana, Généricité d'exposants de Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices, *Ann. I. H. Poincaré. Anal. Non Lin.*, **20**, (2003), 579-624.

[BGVil] C.Bonatti, X.Gómez-Mont, R.Vila, Statistical behaviour of the leaves of Ricatti foliations, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **30**, (2010), 67-96.

[BV] C.Bonatti, M.Viana, Lyapunov exponents with multiplicity 1 for deterministic products of matrices, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **24**, (2004), 1295-1330.

[Bo1] R.Bowen, Symbolic dynamics for hyperbolic flows, *Amer. J. of Math.*, **95**, (1973), 429-459.

[Bo2] R.Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms,* in Lecture Notes in Math., **470**, Springer Verlag, 1975.

[Bo3] R.Bowen, Hausdorff dimension of quasi-circles, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **50**, (1979), 259-273.

[BM] R.Bowen, B.Marcus, Unique ergodicity for horocycle foliations, *Israël J. of Math.*, **26**, (1977), 43-67.

[BR] R.Bowen, D.Ruelle, The ergodic theory of Axiom A flows, *Invent. Math.*, **29**, (1975), 181-202.

[BH] M.Bridson, A.Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren Math. Wiss., **319**, Springer-Verlag, 1999.

[CL] C.Camacho, A.Lins Neto : *Geometric Theory of Foliations*, Birkhäuser, Boston Inc., 1985.

[Ca] A.Candel, Uniformization of surface laminations, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **26**, (1993), 483-516.

[Ch] I.Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando, FL, 1984.

[CE] J.Cheeger, D.Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2008. Revised reprint of the 1975 original.

[CY] S.Y.Cheng, S.T.Yau, Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28**, (1975), 333-354.

[CM] C.Connell, M.Martínez, Harmonic and invariant measures on foliated spaces, preprint.

[DGM] A.Debiard, B.Gaveau, E.Mazet, Théorèmes de comparaison en géométrie Riemannienne, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **12**, (1976), 391-425.

[DK] B.Deroin, V.Kleptsyn, Random conformal dynamical systems, *Geom. Funct. Anal.*, **17**, (2007), 1043-1105.

[dC] M.do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston Inc., 1976.

[Fu1] H.Furstenberg, Noncommuting random products, *Trans. Amer. Math. Soc*, **108**, (1963), 377-428.

[Fu2] H.Furstenberg, Random walks and discrete subgroups of Lie groups, *Adv. Probab. Related Topics*, **1**, Dekker, New York (1971), 1-63.

[Gar] L.Garnett, Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion, *J. Funct. Anal.*, **51**, (1983), 285-311.

[Gh] E.Ghys, Topologie des feuilles génériques, *Ann. of Math.*, **141**, (1995), 387-422.

[GLW] E.Ghys, R.Langevin, P.Walczak, Entropie géométrique des feuilletages, *Acta Math.*, **160**, (1988), 105-142.

[GPl] S.Goodman, J.Plante, Holonomy and averaging in foliated sets, *J. Diff. Geo.*, **14**, (1979), 401-407.

[Gro] M.Gromov, Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group, *L'Enseign. Math.*, **46**, (2000), 391-402.

[Gu] Y.Guivarc'h, On contraction properties for products of Markov driven random matrices, *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **4**, (2008).

[GR] Y.Guivarc'h, A.Raugi, Frontière de Furstenberg, propriété de contraction et théorèmes de convergence, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **69**, (1985), 187-242.

[Ha1] U.Hämenstadt, An explicite description of harmonic measure, *Math. Z.*, **205**, (1990), 287-299

[Ha2] U.Hämenstadt, Cocycles, Hausdorff measures and cross ratios, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **17**, (1997), 1061-1081.

[HI] E.Heintze, H-C Im Hof, Geometry of horospheres, *J. Diff. Geo.*, **12**, (1977), 481-491.

[HPS] M.Hirsch, C.Pugh, M.Shub, *Invariant manifolds*, in Lecture Notes in Math., **583**, Springer Verlag, 1977.

[K1] V.Kaimanovich, Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds, *Ann. I. H. Poincaré. Phys. Théor.*, **53**, (1990), 361-393.

[K2] V.Kaimanovich, Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I.*, **325**, (1997), 999-1004.

[K3] V.Kaimanovich, Discretization of bounded harmonic functions on Riemannian manifolds and entropy, *Potential theory (Nagoya 1990)*, de Gruyter, Berlin (1992), 213-223.

[KL] V.Kaimanovich, M.Lyubich, Conformal and harmonic measures on laminations associated with rational maps, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **173**, (2005).

[Ka1] A.Katok, Entropy and closed geodesics, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **2**, (1982), 339-365.

[Ka2] A.Katok, Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **8**, (1988), 115-140.

[Kn] G.Knieper, Spherical means on compact manifolds of negative curvature, *J. Diff. Geom. Appl.*, **4**, (1994), 361-390.

[LW] R.Langevin, P.Walczak, Entropy, transverse entropy and partitions of unity, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **14**, (1994), 551-563.

[L1] F.Ledrappier, Ergodic properties of Brownian motion on covers of compact negatively curved manifolds, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **19**, (1988), 115-140.

[L2] F.Ledrappier, Harmonic measures and Bowen-Margulis measures, *Israël J. of Math.*, **71**, (1990), 275-287.

[L3] F.Ledrappier, Structure au bord des variétés à courbure négative, *Sémin. de Th. Spec. et Géom., Grenoble*, (1994-1995), 93-118.

[L4] F.Ledrappier, A renewal theorem for the distance in negative curvature, *Proc. Symp. Pure Math.*, **57**, (1995), 351-360.

[LS] T.Lyons, D.Sullivan, Function theory, random paths and covering spaces, *J. Diff. Geom.*, **19**, (1984), 299-323.

[Man] R.Mañé, *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer Verlag, 1987.

[M] G.Margulis, Certain measures associated with U-flows on compact manifolds, *Func. Anal. Appl.*, **4**, (1970), 55-67.

[Ma] M.Martínez, Measures on hyperbolic surface laminations, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **26**, (2006), 847-867.

[Mat] S.Matsumoto, The dichotomy of harmonic measures of compact hyperbolic laminations, *Tohoku Math. J.*, **64**, (2012), 569-592.

[Matt] P.Mattila, *Geometry of sets and measure in Euclidian spaces. Fractals and rectifiability.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Mo] O.Mohsen, *Familles de mesures au bord et bas du spectre*, Thèse de l'École polytechnique.

[MS] C.Moore, C.Schochet, *Global analysis on foliated spaces*, Second edition, Math. Sci. Res. Inst. Publ, **9**, Cambridge University Press, New York, 2006.

[Os] V.Oseledets, A multiplicative ergodic theorem : Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow. Math. Soc.*, **19**, (1968), 197-231.

[Pa] S.Patterson, The limit set of a Fuchsian group, *Acta Math.*, **136**, (1976), 241-273.

[PPS] F.Paulin, M.Pollicott, B.Schapira, Equilibrium states in negative curvature, preprint, arXiv :1211.6242.

[PS] Ya.Pesin, Ya.Sinai, Gibbs measures for partially hyperbolic attractors, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **2**, (1982), 417-438.

[Pl1] J.Plante, Anosov flows, *Amer. J. of Math.*, **94**, (1971), 729-754.

[Pl2] J.Plante, Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.*, **102**, (1975), 327-361.

[Pr] J.J.Prat, Étude asymptotique du mouvement brownien sur une variété riemannienne à courbure négative, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B*, **272**, (1971), 1586-1589.

[PSW] C.Pugh, M.Shub, A.Wilkinson, Hölder foliations, *Duke Math. J.*, **86**, (1997), 517-546.

[Ra] M.Ratner, Markov partitions for Anosov flows on n-dimensional manifolds, *Israël J. of Math.*, **15**, (1973), 92-114.

[R] T.Roblin, Un théorème de Fatou pour les densités conformes avec applications aux revêtements galoisiens en courbure négative, *Israël J. of Math.*, **147**, (2005), 333-357.

[Ro] V.A. Rokhlin, On the fundamental ideas of measure theory, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **10**, (1962), 1-52.

[Ru] W.Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

[Sc] B.Schapira, Mesures quasi-invariantes pour un feuilletage et limites de moyennes longitudinales, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I.*, **336**, (2003), 349-352.

[Sh] M.Shub, *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, in Astérisque, **56**, Soc. Math. France, 1978.

[Si] Ya.Sinai, Gibbs measures in ergodic theory, *Russ. Math. Surveys*, **27**, (1972), 21-69.

[Su1] D.Sullivan, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **50**, (1979), 172-202.

[Su2] D.Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, *J. Diff. Geo.*, **18**, (1983), 723-732.

[T] W.Thurston, Geometry and topology of 3-manifolds, Princeton Lecture Notes, 1980, currently available at library.msri.org/books/gt3m/

[Wa] P.Walczak, Dynamics of the geodesic flow of a foliation, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **8**, (1988), 637-650.

[W] S.Wolpert, Thurston's Riemannian metric for the Teichmüller space, *J. Diff. Geo.*, **23**, (1986), 143-174.

[Y] L.S.Young, Dimension, entropy and Lyapunov exponents, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **2**, (1982), 109-129.